

Corso di laurea triennale in Chimica

Esonero di Istituzioni di Matematiche I

Traccia A

9 Gennaio 2017

1. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione

$$|z - 1| + \frac{1+i}{1-i} \bar{z} - \operatorname{Re}(z^2) = 2i + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^4,$$

e disegnare poi le soluzioni trovate nel campo complesso.

2. Studiare dominio e positività della funzione

$$f(x) = \frac{(3^{2x} - 3^{x+1} - 4)^{\sqrt{2}} + \sqrt{\arctan x}}{\sqrt[4]{x^2} \sin x}.$$

3. Studiare asintoti della funzione

$$g(x) = x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}}.$$

4. Studiare la funzione

$$h(x) = \sqrt[5]{x^5 - x^4}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$ si ha

$$|z-1| = |a-1+ib| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

$$\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}((a+ib)^2) = a^2 - b^2$$

$$\frac{1+i}{1-i} \bar{z} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} \bar{z} = \frac{1+i^2+2i}{2} (a+ib) = ai+b$$

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^4 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) \right)^4 = \cos 4 \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin 4 \left(-\frac{\pi}{8} \right) = -i$$

e quindi l'equazione diventa

$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} + ai + b = a^2 + b^2 = 2i - i \Leftrightarrow$$

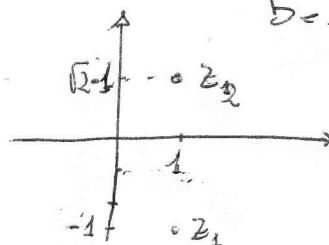
$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} + ai + b - a^2 + b^2 = i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + b - a^2 + b^2 = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ \sqrt{b^2} + b - 1 + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ |b| + b - 1 + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b \geq 0 \\ b + b - 1 + b^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b < 0 \\ -b + b - 1 + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \geq 0 \\ b = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 1 \\ b < 0 \\ b^2 + 2b - 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z$.

$$z_1 = 1-i, \quad z_2 = 1+(\sqrt{2}-1)i$$



$$b = \begin{cases} -1 & \text{acc} \\ +1 & \text{N. acc} \end{cases}$$

$$b_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & \text{N. acc} \\ -1+\sqrt{2} & \text{acc} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3^{2x} - 3^{x+1} - 4 \geq 0 \\ \text{and } x \geq 0 \\ x^2 \sin x > 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{la funzione potenza con esp. } \alpha = \sqrt{2} > 0 \text{ e} \\ \text{definita in } [0, +\infty) \end{array} \right)$$

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 4 \geq 0$$

posto $t = 3^x$ si ha

$$t^2 - 3t - 4 \geq 0$$

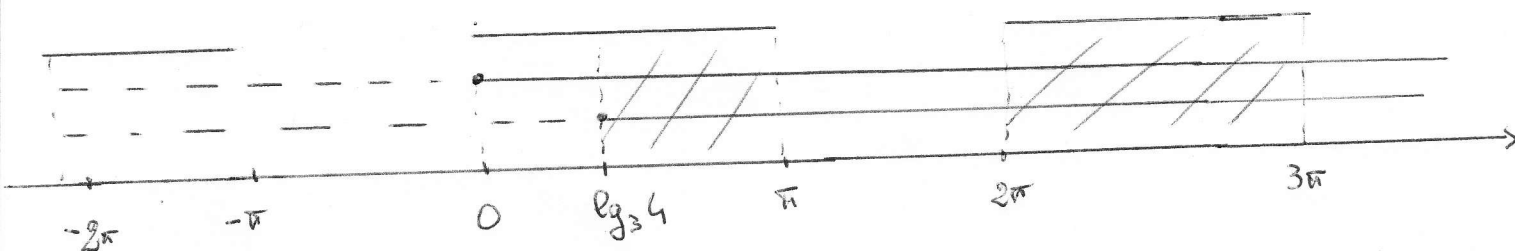
$$3^x \leq -1 \vee 3^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \log_3 4$$

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi w.p.

(2)

$$\begin{cases} x \geq \lg_3 4 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \wedge \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \lg_3 4 \\ x \geq 0 \\ x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[\end{cases}$$



$$ID = [\lg_3 4, \pi[\cup \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq 1}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$$

Perché la funzione potenza e la funzione seno sono sempre positive quando definite, si conclude che la funzione $f(x)$ è sempre positiva, anzi $f(x) > 0$ (strettamente positiva) $\forall x \in ID$.

3. $ID(g) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Perché $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}} = 1 \cdot 2^{\frac{2}{0^+}} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}} = 1 \cdot 2^{\frac{2}{0^-}} = 0$ $\Rightarrow$ A $x=1$ non serve, solo da un lato

Perché $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x = \pm \infty$ $\nexists$ as. ow bz.

(N.B. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{-x} = -1$ perché trascurare costanti)

Perché $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}}}{x} = \frac{1}{2}$ (m)

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot 2^{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(2^{\frac{1+x}{1-x} + 1} - 1 \right)}{\frac{1}{x}}$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{2} \frac{2^{\frac{1}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} \cdot \frac{2}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \lg 2 \cdot (-2) = -\lg 2 \quad (9)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2^{\frac{1}{1-x}} - 1}{\frac{2}{1-x}} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = \frac{2}{1-x}}} \frac{2^y - 1}{y} = \lg 2, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{1-x} = -2 \right)$$

si conclude che $y = \frac{1}{2}x - \lg 2$ è asintoto obliquo a $\pm \infty$.

4. $ID = \mathbb{R}$ (radice con indice dispari)

Poiché $R(-x) = \sqrt[5]{-x^5 - x^4} \neq \begin{matrix} +R(x) \\ -R(x) \end{matrix} \Rightarrow R$ non è né pari né dispari

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ y = \sqrt[5]{x^5 - x^4} \end{cases} \Leftrightarrow x^4(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$(0,0)$ $(1,0)$ intersezioni con asse x

$$R(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^5 - x^4} > 0 \Leftrightarrow x^5 - x^4 > 0 \Leftrightarrow x^4(x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ x > 1 \end{matrix} \Rightarrow x > 1$$

R è positiva per $x > 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x^5 - x^4} = \sqrt[5]{-\infty - \infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 - x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty \quad \text{per gli ordini:} \quad (\text{razioni infinite più lente})$$

$\Rightarrow \nexists$ as. orizz. a $\pm \infty$.

Vediamo se ci sono asintoti obliqui. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{R(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 - x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[5]{\frac{x^5 - x^4}{x^5}} = 1 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} R(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[5]{x^5 - x^4} - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \left(\sqrt[5]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}} - 1}{-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{5} \quad (9)$$

$y = x - \frac{1}{5}$ As. obliquo a $\pm \infty$.

Studio delle derivate prima

$$y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x^5-x^4)^4}} (5x^4-4x^3)$$

$$\text{ID}(y') = \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 - x^4 \neq 0\} \\ = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Studio le derivate nei pli $x=0$ e $x=1$. Poiché

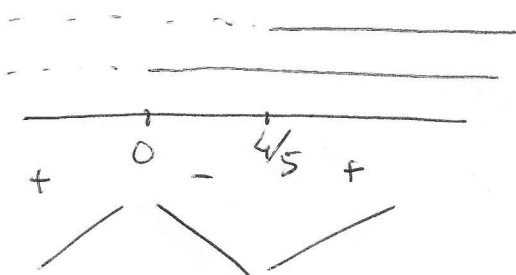
$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^3(5x-4)}{5\sqrt[5]{x^{16}(x-1)^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^3(5x-4)}{5x^3\sqrt[5]{x(x-1)^4}} = \frac{-4}{0^\pm} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y' = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4-4x^3}{5\sqrt[5]{x^{16}(x-1)^4}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

segue da $y'_-(0) = +\infty$ $y'_+(0) = -\infty \Rightarrow x=0$ pto di cuspidate

$y'(1) = +\infty \Rightarrow x=1$ pto di flesso a tangente verticale

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3(5x-4)}{5\sqrt[5]{x^4(x-1)^4}} > 0 \Leftrightarrow x^3(5x-4) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ x > \frac{4}{5}$$



$$y' > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{4}{5}$$

R str. crescente in $(-\infty, 0[$ e in $]\frac{4}{5}, +\infty)$

str. decrescente in $]0, \frac{4}{5}[$

$$M \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=f(\frac{4}{5}) \end{cases}$$

Calcolo ora le derivate seconda: poiché $y' = \frac{x^3(5x-4)}{5x^3\sqrt[5]{x(x-1)^4}}$, si ha

$$y'' = \Delta \frac{5x-4}{5\sqrt[5]{x(x-1)^4}} = \frac{1}{5} \frac{5\sqrt[5]{x(x-1)^4} - (5x-4)\frac{1}{5}[x(x-1)^4]^{-\frac{4}{5}}[x(x-1)^4 + x \cdot 4(x-1)^3]}{(\sqrt[5]{x(x-1)^4})^2}$$

$$\text{Dunque } y'' > 0 \Leftrightarrow 5\sqrt[5]{x(x-1)^4} - \frac{(5x-4)(x-1)^3(x-1+4x)}{5\sqrt[5]{(x(x-1)^4)^4}} > 0$$

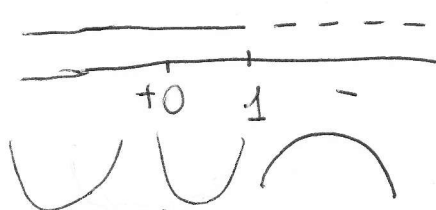
$$\Leftrightarrow 25x(x-1)^4 - (5x-4)(5x-1)(x-1)^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 [25x(x-1) - (25x^2 - 20x - 5x + 4)] > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 (\cancel{25x^2} - \cancel{25x} - \cancel{25x^2} + \cancel{25x} - 4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^3 < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$x \neq 0$



Pois $y'' > 0$ por $x \in]-\infty, 0[$ e $x \in]0, 1[$
 segue de f é côncava em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$
 mentre é côncava em $]1, +\infty[$.

