

Corso di laurea in Chimica
Esame
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 dicembre 2016

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$z^2 - |z| + 2iz - 2i \left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^{172} = 0.$$

2. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$y = \log \left(-1 - \log_{\frac{1}{4}} \left(x + 3 - \sqrt{2x^2 - x - 1} \right) \right).$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = x + 1 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Data la funzione

$$g(x) = \arccos^2 \left(2x\sqrt{1-x^2} \right),$$

scrivere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x^2+3}{x+1},$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso improprio in $] -1, 0 \}$, in $[0, 1[$ e in $[2, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poché

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} \right)^{172} = \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right)^{172} = \cos \left(-\frac{172}{8} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{172}{8} \pi \right)$$

$$= \cos \frac{43}{2} \pi - i \sin \frac{43}{2} \pi = \cos \left(20\pi + \frac{3}{2} \pi \right) - i \sin \left(20\pi + \frac{3}{2} \pi \right) = i$$

L'equazione differenziale $z^2 - |z| + 2iz + 2 = 0$.

Poiché $z = a + ib$ in $\mathbb{R}a$

$$a^2 - b^2 + 2abi - \sqrt{a^2 + b^2} + 2ai - 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - \sqrt{a^2 + b^2} - 2b + 2 = 0 \\ 2ab + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ -b^2 - \sqrt{b^2} - 2b + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ a^2 - 1 - \sqrt{a^2 + 1} + 2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b^2 + |b| + 2b - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ a^2 + 3 = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \\ b^2 + 3b - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \\ b^2 + b - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ a^2 + 1 \geq 0 \\ a^2 + 3 \geq 0 \\ a^4 + 6a^2 + 9 = a^2 + 1 \end{cases}$$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ Non acc.} \\ \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} > 0 \text{ acc.} \end{cases}$$

$$b = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 < 0 \text{ acc.} \\ 1 > 0 \text{ Non acc.} \end{cases}$$

$$a^4 + 5a^2 + 8 = 0$$

poiché $a^2 = t$
 $t^2 + 5t + 8 = 0$
 impossibile perché $\Delta < 0$

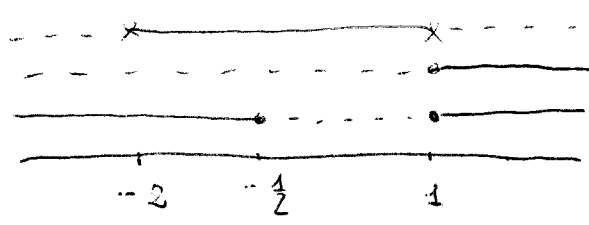
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \vee \emptyset$$

L'equazione ha 2 sol. $z = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} i$, $z = -2i$

2. $-1 - \log_{\frac{1}{4}}(x+3 - \sqrt{2x^2 - x - 1}) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x+3 - \sqrt{2x^2 - x - 1}) < -1$

$$\Leftrightarrow x+3 - \sqrt{2x^2 - x - 1} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x - 1} < x-1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \\ x \geq 1 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \geq 1 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$



Nessuna sol
 $ID = \emptyset$

3. $ID \doteq \frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$ $ID = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

f in pari ne dispari

Non si può studiare direttamente $f(x) > 0$ e $f(x) = 0$, quindi si fa lo studio delle potenze e delle intersezioni con gli assi.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty - \log_{\frac{1}{2}} 1 = +\infty$ $\neq$ as. orizz.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} -\log_{\frac{1}{2}} y = -\infty$ $x = -1$ As. Vert.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\log_{\frac{1}{2}} y = +\infty$ $x = 1$ As. Vert.

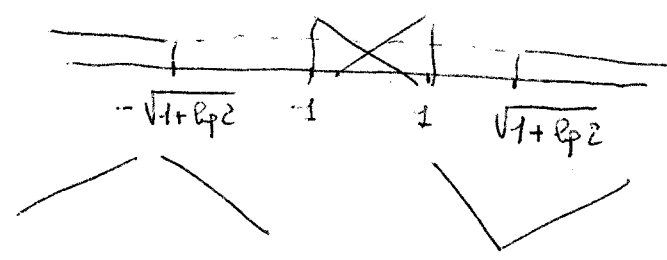
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1}}{x} \right) = 1$ (m)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = 1$ (q) $y = x+1$
 As. obliquo a $\pm \infty$

$y' = 1 - \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\log \frac{1}{2}} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{-2}{(x^2-1)(-\log 2)} = 1 - \frac{1}{(\log 2)(x^2-1)}$ $\forall x \in ID(y)$

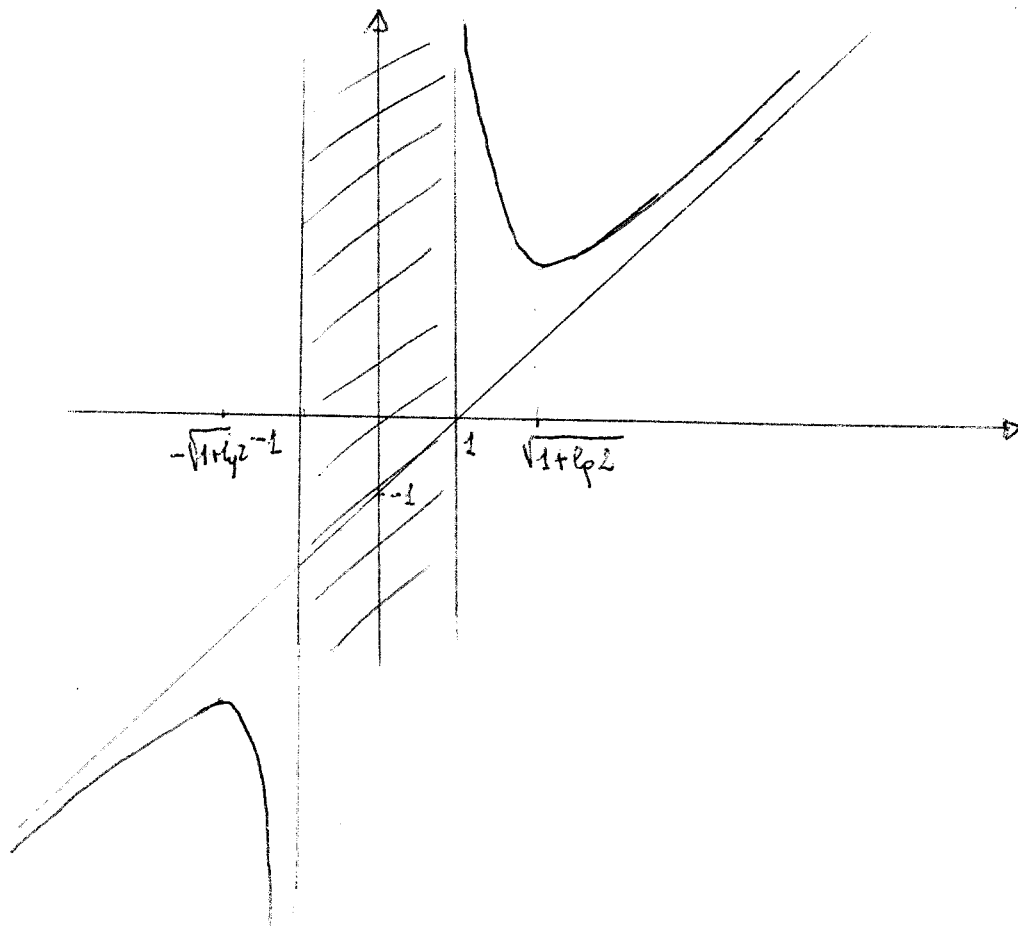
$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{(\log 2)(x^2-1)-1}{(\log 2)(x^2-1)} > 0 \Leftrightarrow (\log 2)x^2 > \frac{\log 2+1}{\log 2} \Leftrightarrow x < -\sqrt{1+\log 2} \vee x > \sqrt{1+\log 2}$
 $\forall x \in ID$

$\begin{cases} x = -\sqrt{1+\log 2} \\ y = f(-\sqrt{1+\log 2}) \end{cases} \quad m \quad \begin{cases} x = \sqrt{1+\log 2} \\ y = f(\sqrt{1+\log 2}) \end{cases}$



$y'' = -\frac{1}{\log 2} \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(\log 2)(x^2-1)^2}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \in ID \end{cases}$
 $y'' > 0 \Leftrightarrow x > 1$



4. Poiché $g(0) = \arccos^2(0) = \frac{\pi^2}{4}$

$$g'(x) = 2 \arccos(2x\sqrt{1-x^2}) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= -\frac{4 \arccos(2x\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \cdot \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \quad g'(0) = -4 \cdot \frac{\pi}{2} = -2\pi$$

la retta tangente al grafico di g nel pt di ascissa $x_0=0$ ha equazione

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \quad \text{cioè} \quad y = -2\pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

5. $I = \int \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x^2+3}{x+1} dx = \int D \left(-\frac{1}{x-1} \right) \log \frac{x^2+3}{x+1} dx = (\text{integrazione per parti})$

$$= -\frac{1}{x-1} \log \frac{x^2+3}{x+1} + \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x^2+3} \cdot \frac{2x(x+1) - x^2-3}{(x+1)^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x-1} \log \frac{x^2+3}{x+1} + \int \frac{x^2+2x-3}{(x^2+3)(x-1)(x+1)} dx.$$

Risolvo l'integrale dopo aver osservato che $\frac{x^2+2x-3}{(x^2+3)(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+3)(x-1)(x+1)}$

Per Heuriste: $\frac{x+3}{(x^2+3)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = (A+B)x^2 + (B+C)x + 3A+C = 0$ 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=1 \\ 3A+C=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ C=1-B \\ -3B+1-B=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ C=\frac{3}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x^2+3)(x+1)} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{x-3}{x^2+3} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{1}{4} \int \frac{2x-6}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{1}{4} \log(x^2+3) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

Dunque

$$I = -\frac{1}{x-1} \log \frac{x^2+3}{x+1} - \frac{1}{4} \log(x^2+3) + \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

ii) Poiché h è definita e continua in $]-1, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\downarrow \frac{1}{4}} \underbrace{\log \frac{x^2+3}{x+1}}_{\downarrow +\infty} = +\infty \quad \text{con ord. molto lento e quindi } < \alpha < 1$$

$$\Rightarrow h \text{ è integ. in s.i. in }]-1, 0].$$

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\downarrow +\infty \text{ con ord } 2} \underbrace{\log \frac{x^2+3}{x+1}}_{\rightarrow \log 2} = +\infty \quad \text{con ord. } 2 > 1 \Rightarrow h \text{ non è integ. in s.i. in } [0, 1[.$$

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\downarrow 0 \text{ con ord } 2} \underbrace{\log \frac{x^2+3}{x+1}}_{\rightarrow +\infty \text{ con ord. molto lento}} = 0 \quad \text{con ord. } < 2 \text{ e } > 2 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Puo'.

Scezzo ε pu' δ $2 - \varepsilon > 1$ ($\Leftrightarrow \varepsilon < 1$) segue che h è integ. in s.i. in $[2, +\infty)$.