

Corso di laurea in Chimica

Esame

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 ottobre 2016

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$(z^2)^4 = (1 + i\sqrt{3})(\bar{z})^4.$$

2. Studiare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{\ln_4^2 x - \ln_2 |x|} + \sqrt{9^x - 3^{x+1}}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos \frac{|2x|}{1+x^2}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\sin(\pi \cos x) - \sin(\pi e^{-x})]}{\ln(x+1) - \sin x}.$$

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\sin x \cos x}{e^{3x}},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso improprio in $[0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ si ha $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

Tueller $1 + i\sqrt{3} = \sqrt{4}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

essendo $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Segue da

$$\rho^8 (\cos 8\theta + i \sin 8\theta) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \rho^4 (\cos(-4\theta) + i \sin(-4\theta)) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho^8 = 2\rho^4 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 8\theta = \frac{\pi}{3} - 4\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt[4]{2} \\ 12\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{36} + \frac{k}{6}\pi$$

Dunque l'eq. ha sol. $z = 0$, $z = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{6}))$

In tutto sono 13 soluzioni distinte

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$$

2. $\begin{cases} \ln_4^2 x - \ln_2 |x| \geq 0 \\ 9^x - 3^{x+1} \geq 0 \end{cases}$

Poiché $\ln_4 x = \frac{\ln_2 x}{\ln_2 4} = \frac{1}{2} \ln_2 x$
il sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \ln_2^2 x - \ln_2 x \geq 0 \\ x > 0 \\ 3^{2x} \geq 3^{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln_2 x \leq 0 \vee \ln_2 x \geq 4 \\ x > 0 \\ 2x \geq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 16 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x = 1 \vee x \geq 16$$

$$ID = \{1\} \cup [16, +\infty)$$

3. $-1 \leq \frac{12x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2-2x \geq 0 \\ 1+x^2+2x \geq 0 \end{cases}$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (1-x)^2 \geq 0 \\ (1+x)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ID = \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f è pari: lo studio per $x \geq 0$
e prima si basterà il grafico rispetto
all'asse y .

A co. verticali poiché f è continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{|2x|}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \text{As. orizz. a } +\infty$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \arccos \frac{|2x|}{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arccos \frac{|2x|}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{|2x|}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \quad (\pm 1, 0) \quad \text{intersezione con asse } y. \text{ Studio ora } y' \text{ per } x \geq 0.$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y' = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot 2 \cdot \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = - \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^4+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= - \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot 2 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = - 2 \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{1+x^2} & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Per } x \rightarrow 1^- \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{2}{1+x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{1+x^2} = +1$$

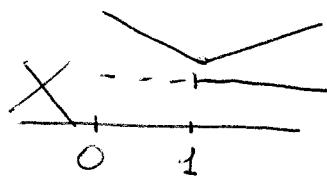
$x = 1$ punto angoloso
(e per simmetria anche $x = -1$ b.e.)

$$\text{Per } x \rightarrow 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{1+x^2} = -2$$

e per simmetria $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = 2$

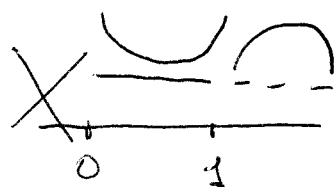
anche $x = 0$ pto angoloso

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

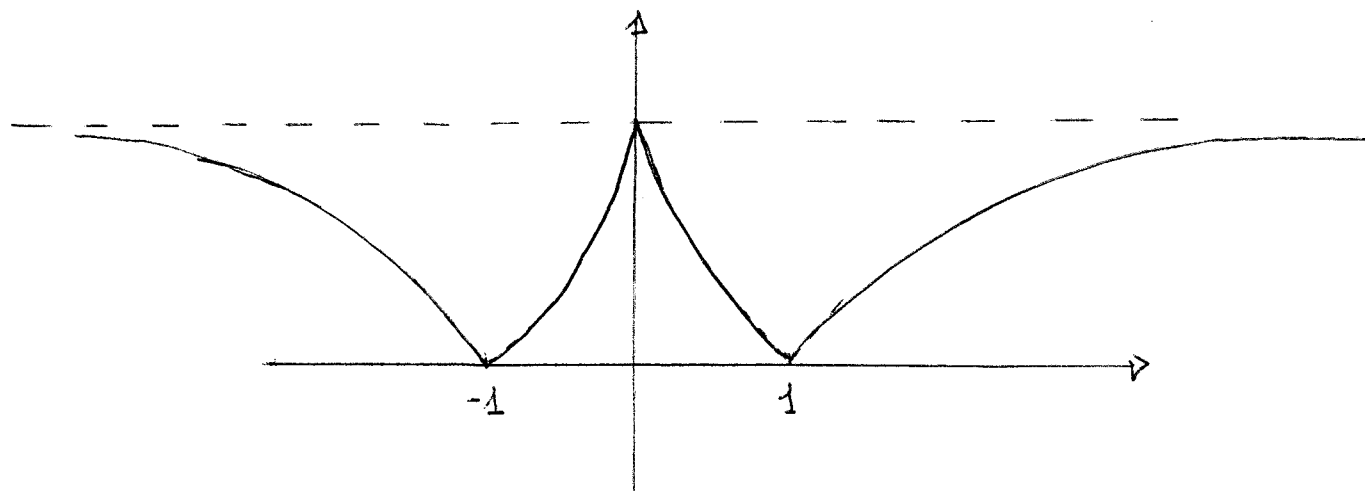


$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ pto di minimo relativo e assoluto

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$



$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ punto di flesso



4. Poiché $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $\ln(x+1) - \sin x = x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Se il limite si può risolvere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{-\frac{x^2}{2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{x}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{\overset{0}{\cos(\pi \cos x)} (-\pi \sin x) + \overset{0}{\cos(\pi e^{-x})} \cdot \pi e^{-x}}{1} = -2((-1) \cdot 0 - \pi) = 2\pi$$

5. i) $\int \frac{\sin 2x}{e^{3x}} dx = \int \sin 2x \cdot \underset{D(-\frac{e^{-3x}}{3})}{e^{-3x}} dx \stackrel{P.P.}{=} \sin 2x \cdot \left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) + \int \frac{e^{-3x}}{3} \cdot 2 \cos 2x dx$

$$\stackrel{P.P.}{=} -\frac{1}{3} e^{-3x} \sin 2x + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \cos 2x - \int \frac{e^{-3x}}{3} \cdot 2 \sin 2x dx \right)$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x} \sin 2x - \frac{2}{9} e^{-3x} \cos 2x - \frac{4}{9} \int e^{-3x} \sin 2x dx + C$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{4}{9}\right) \int e^{-3x} \sin 2x dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \sin 2x - \frac{2}{9} e^{-3x} \cos 2x + C$$

$$\text{e quindi } \int e^{-3x} \sin 2x dx = -\frac{1}{13} \frac{3e^{-3x} \sin 2x + 2e^{-3x} \cos 2x}{\frac{13}{9}} + C$$

$$\text{così } \int e^{-3x} \sin 2x dx = -\frac{e^{-3x} (3 \sin 2x + 2 \cos 2x)}{13} + C$$

ii) g è continua e quindi integrabile in $[0,1]$ in senso classico e in senso improprio; g è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ perché continua e $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-3x} \sin x \cos x = 0$ con ord grande