

Corso di laurea in Chimica
Esame
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

15 giugno 2016

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$|z| + z^2 + 2 \operatorname{Re}(z) = 2\bar{z}.$$

2. Determinare campo di esistenza ed asintoti della funzione

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-x^2+x\sqrt{x^2-x+1}}.$$

3. Studiare la funzione

$$g(x) = \ln |x^2 - 4| - |x| + 1$$

e disegnarne il grafico approssimativo. Dire poi, giustificando la risposta, se g è continua e derivabile nel suo insieme di definizione.

4. Data la funzione $g(x)$ del punto precedente

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio, giustificando la risposta, negli intervalli $[0, 1]$, $[2, 3]$ e $[6, +\infty[$.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$ l'equazione diventa

$$\sqrt{a^2+b^2} + a^2 - b^2 + 2abi + 2a = 2a - 2ib \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \sqrt{1+b^2} + 1 - b^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ \sqrt{a^2} + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$b(a+1) = 0$$

$$\sqrt{1-b^2} = b^2 - 1$$

$$|a| + a^2 = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b^2 - 1 \geq 0 \\ 1 + b^2 = b^4 + 1 - 2b^2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ |a|^2 + |a| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b^2 \geq 1 \\ b^2(b^2 - 3) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ |a| = 0 \vee |a| = -1 \end{cases} \text{imp}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b^2 \geq 1 \\ b = 0 \text{ non acc.} \end{cases} \vee b = \pm\sqrt{3} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \text{L'equazione Re SOP. } z = 0, z = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

$$2. \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{x}{x+1} = 0 \\ -x^2 + x\sqrt{x^2 - x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ 0 > 0 \end{cases} \emptyset$$

$$ID = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-x^2 + x\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(-x^2 + x\sqrt{x^2 - x + 1}) \lg \frac{x}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x^2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = e^{-\infty} = 0 \quad y = 0 \text{ As. origin.}$$

$$\text{poiché } (-x^2 - x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}) \lg(1 - \frac{1}{x+1}) \sim -2x^2 \left(-\frac{1}{x+1} \right) = \frac{2x^2}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-x^2 + x\sqrt{x^2 - x + 1}} = (+\infty)^{-1 - \sqrt{3}} = 0 \quad \nexists \text{ A.V. per } x \rightarrow -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-x^2 + x\sqrt{x^2 - x + 1}} = 0^0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(-x^2 + x\sqrt{x^2 - x + 1}) \lg \frac{x}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) (\lg x - \lg(x+1))} = e^0 = 1 \quad \text{poiché } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lg x = 0 \quad \nexists \text{ A2 ver. per } x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-x^2 + x \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-x^2 + x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}) \ln \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)} = \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) \left(\frac{-1}{x+1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{-1}{x+1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

(perché $\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \sim \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2}$) $y = \sqrt{e}$ As. ob. destra

3. ID: $|x^2 - 4| > 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ $g(-x) = g(x)$ g pari (posso studiarla solo per $x \geq 0$)
 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$ $x=2$ A.V. Non studio positività e intersezione con asse x

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty - \infty = -\infty$ perché $\text{ord}(\ln|x^2-4|) < \text{ord}|x|$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{x} - \frac{x}{x} + \left(\frac{1}{x} \right) = -1$ $\nearrow 0$ $\nexists$ as. oblique per $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2-4) - x + 1 + x = +\infty$ $\nexists$ as. oblique per $x \rightarrow +\infty$

$y' = \frac{1}{x^2-4} \cdot 2x - \frac{x}{|x|}$ $\forall x \in \text{ID} - \{0\}$

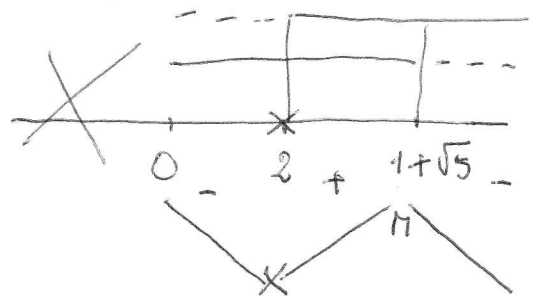
$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2x}{x^2-4} + 1 = \mp 1$ $\begin{cases} x=0 \text{ punto angoloso} \\ y = \ln 4 + 1 \end{cases}$

$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-4} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 4}{x^2-4} > 0$

$N > 0 \quad -x^2 + 2x + 4 > 0 \quad 1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}$

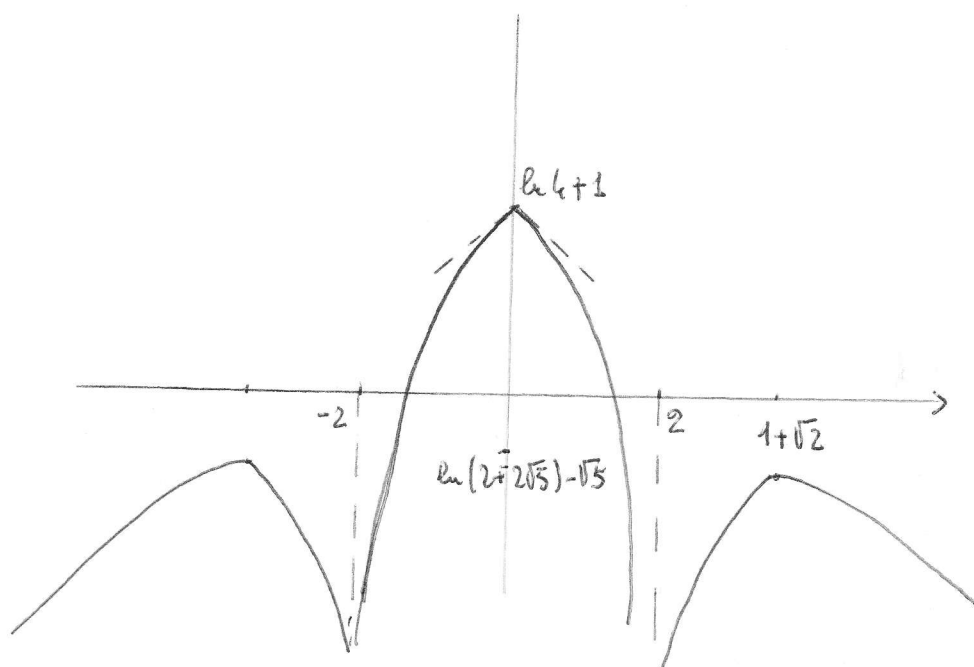
$D > 0 \quad x^2 - 4 > 0 \quad x < -2 \vee x > 2$

$\begin{cases} x=0 \text{ max rel.} \\ y = \ln 4 + 1 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ y = \ln(2 + 2\sqrt{5}) - \sqrt{5} \end{cases}$



$y'' = 2 \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2-4)^2} = -2 \frac{x^2 + 4}{(x^2-4)^2}$ $\forall x \in \text{ID} - \{0\}$ $y'' > 0 \quad x \in \emptyset$





Poiché $\ln(2+2\sqrt{5})-\sqrt{5} < 0$, il grafico interseca l'asse delle x solo in due pli $(\pm \alpha, 0)$ con $0 < \alpha < 2$ e la funzione è positiva per $-\alpha < x < \alpha$.
 g è continua perché somma e composta di funzioni continue
 g non è derivabile perché $x=0$ pli angolare.

$$4. i) \int \ln|x^2-4| dx = \int (Dx) \ln|x^2-4| dx = x \ln|x^2-4| - \int x \cdot \frac{2x}{x^2-4} dx$$

$$= x \ln|x^2-4| - 2 \int \frac{x}{x^2-4} dx - 8 \int \frac{1}{x^2-4} dx$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{x^2-4}$$

$$= x \ln|x^2-4| - 2x - 8 \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \right) dx \quad \text{dove } A \text{ e } B \text{ sono tali che}$$

$$A(x+2) + B(x-2) = 1$$

$$= x \ln|x^2-4| - 2x - 2 \ln|x-2| + 2 \ln|x+2| + C \quad \text{per } x=2: A=\frac{1}{4}$$

$$\int |x| dx = \int (Dx) |x| dx = x \cdot |x| - \int x \cdot \frac{x}{|x|} dx = x \cdot |x| - \int \frac{|x|}{|x|} dx = x \cdot |x| - \int 1 dx \Rightarrow$$

$$2 \int |x| dx = x|x| + C \Rightarrow \int |x| dx = \frac{x|x|}{2} + C$$

$$\text{Donque } \int g(x) dx = x \ln|x^2-4| - 2x - 2 \ln|x-2| + 2 \ln|x+2| + \frac{x|x|}{2} + x + C$$

ii) g è continua in $[0,1]$ chiuso e limitato $\Rightarrow g$ integ. in senso classico
 e quindi in senso improprio
 lim $g(x) = -\infty$ con ordine comunque lento e quindi $\langle \frac{1}{x} \rangle$ g integ. in
 lim $g(x) = -\infty \Rightarrow g$ non è integ. in s. imp. (perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$)