

Corso di laurea in Chimica
Esame
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

30 marzo 2016

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$z^4 + \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = (i)^{86} + \left(\frac{\cos \frac{25}{12}\pi + i \sin \frac{25}{12}\pi}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \right)^6.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{x^2} - 1} - \frac{1}{x \log(1+x)} \right).$$

3. Studiare la funzione

$$g(x) = \sqrt{\left| \frac{x^3 - x}{x + 1} \right|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo (si ometta lo studio della derivata seconda).

4. Data la funzione

$$h(x) = \frac{(x-2) \arctan(\sqrt{x^2 - 4x})^3}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio, giustificando la risposta, negli intervalli $[-2, 0[$, $[5, 6]$, e $[6, +\infty[$.

Svolgimento

1.

Poiché $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{1-3+2\sqrt{3}i}{1-3i^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$(i)^{86} = (i^2)^{43} = (-1)^{43} = -1$$

$$\left(\frac{\cos \frac{25}{12}\pi + i \sin \frac{25}{12}\pi}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \right)^6 = \left(\cos \frac{25-1}{12}\pi + i \sin \frac{25-1}{12}\pi \right)^6 = \cos \frac{24}{12} \cdot 6\pi + i \sin \frac{24}{12} \cdot 6\pi$$

$$= \cos 12\pi + i \sin 12\pi = 1$$

l'equazione di Senka

$$z^4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \sqrt[4]{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi}$$

essendo $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

e quindi

$$z_k = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{5}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{5}{3} + 2k\pi}{4} \right) \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi$$

Per $k=0$: $z_0 = \cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi$

$k=1$: $z_1 = \cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi$

$k=2$: $z_2 = \cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi = -z_0$

$k=3$: $z_3 = \cos \frac{23}{12}\pi + i \sin \frac{23}{12}\pi = -z_2$

L'equazione ha 4 radici complesse a due a due opposte.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{x^2}-1} - \frac{1}{x \lg(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lg(x+1) - e^{x^2} + 1}{(e^{x^2}-1)(x \lg(x+1))} =$ per Taylor
in Ra

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2 \cdot x \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} =$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty \wedge \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty.$$

3. ID: $\left| \frac{x^3 - x}{x+1} \right| \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ID = $\mathbb{R} - \{-1\}$

g non è né pari né dispari perché il suo dominio non è simmetrico rispetto all'origine

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=-1$$

Non all.

$(0,0)$ $(1,0)$ intersezioni con gli assi

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}} = \sqrt{2} \quad \text{As. vert.}$$

g è prolungabile per continuità in $x=-1$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|x|} = +\infty \quad (\text{Trascuro gli inf. } \rightarrow \text{li più tardi})$$

As. orizzontali. Vediamo se $\exists$ asintoti obliqui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3-x}{x^3+x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^3-x}{x^3+x}} = -1 \end{aligned}$$

N.B. Si può togliere il valore assoluto perché $\frac{x^3-x}{x+1}$ è sicuramente positivo per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

N.B. $\forall x \neq -1$:
 $\frac{x^3-x}{x+1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$
 $y = x - \frac{1}{2}$ As. ob. a $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x-x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

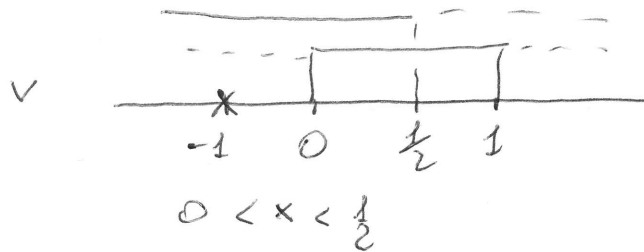
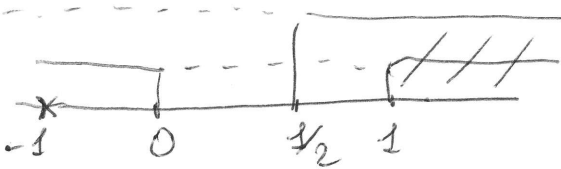
$y = -x + \frac{1}{2}$ As. ob. a $-\infty$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{x^3-x}{x+1} \right|} = \frac{1}{2} \sqrt{|x^2-x|} = \frac{1}{2\sqrt{|x^2-x|}} \cdot \frac{|x^2-x|}{x^2-x} (2x-1) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

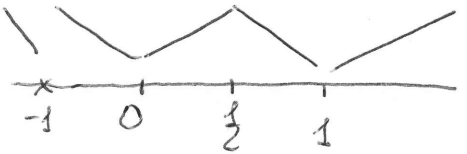
Perciò $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$ e ha

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & x < 0 \vee x > 1, x \neq -1 \\ -\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

e ha $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > 1 \\ 2x-1 > 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x-1 < 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$



Conclusione: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$



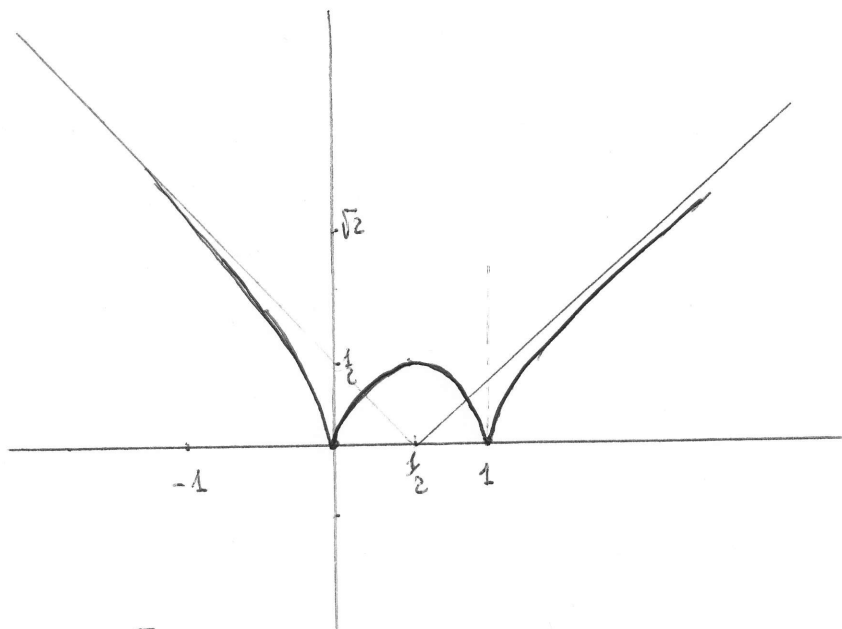
Quindi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ sono pt di massimo relativo e assoluto (giacchè
sempre essendo $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{I}_D$
 $g=0$ per $x=0 \vee x=1$)
mentre $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ è pt di massimo relativo ma non assoluto

Studio ora la derivabile nei pt $x=0$ e $x=1$.

Perciò $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x=0 \text{ pt di cuspidè}$

Analogamente

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x=1 \text{ pt di cuspidè}$



4. Per di $\Delta \sqrt{x^2 - 4x} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$ si può integrare per parti:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-2) \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3}{\sqrt{x^2-4x}} dx &= \int (\Delta \sqrt{x^2-4x}) \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3 dx = \\ &= \sqrt{x^2-4x} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3 - \int \sqrt{x^2-4x} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-4x})^6} \cdot 3(\sqrt{x^2-4x})^2 \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} dx \\ &= \sqrt{x^2-4x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3 - 3 \int \frac{(x^2-4x)(x-2)}{1+(x^2-4x)^3} dx \end{aligned}$$

Risolve il secondo integrale ponendo $x^2-4x=t \Rightarrow 2(x-2)dx=dt$

$$\int \frac{(x^2-4x)(x-2)}{1+(x^2-4x)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{1+t^3} \stackrel{\text{McLaurin}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{t}{(1+t)(t^2-t+1)} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\lg|t+1| + \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \right) = \frac{1}{6} \left(-\lg|t+1| + \frac{1}{2} \int \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{2}{t^2-t+1} dt \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\lg|t+1| + \frac{1}{2} \lg(t^2-t+1) + \int \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dt \right) = \frac{1}{6} \left(\lg \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\lg \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + C = \frac{1}{6} \left(\lg \frac{\sqrt{(x^2-4x)^2-x^2+4x+1}}{x^2-4x+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(x^2-4x)-1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

Dunque

$$I = \sqrt{x^2-4x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3 - \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(x^2-4x)^2-x^2+4x+1}}{x^2-4x+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-8x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

* Per trovare le costanti A, B, C basta osservare che

$$A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1) = t \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -3A=1 \\ C=-A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

ii) Poiché la funzione è definita per $x^2-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 4$ ha:

h è integrabile in $[-2, 0]$ essendo continua e convergente a 0 poiché
 lim $\frac{(x-2)\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3}{\sqrt{x^2-4x}} = -2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t} = 0$
 and $t^3 \sim t^3$

h è integrabile in $[5, 6]$ essendo continua in un intervallo chiuso e limitato.

h non è integrabile in $[6, +\infty)$ perché lim $\frac{(x-2)\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-4x})^3}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{\pi}{2} \neq 0$.
 (Note: $\sqrt{x^2-4x} \rightarrow 1$ and $\operatorname{arctg} \rightarrow \frac{\pi}{2}$)