

Corso di laurea in Chimica
Esame
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 febbraio 2016

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$i\bar{z}^2 + |z|^2 = \sqrt{i} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{\cos \frac{25}{12}\pi + i \sin \frac{25}{12}\pi}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\pi}.$$

2. Studiare estremi assoluti e codominio della funzione

$$f(x) = \arctan \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right|.$$

3. Studiare la funzione

$$g(x) = \sqrt[3]{|x^3| - 3x^2 - 2x}$$

e disegnarne il grafico approssimativo (si ometta lo studio della derivata seconda).

4. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x-1}{x+1}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio, giustificando la risposta, negli intervalli $[-2, -1[$, $]1, 2]$, e $[2, +\infty[$.

Svolgimento

1. Poiché

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^2 = \left(\frac{1+i^2+2i}{2}\right)^2 = -1$$

$$\frac{\cos \frac{25}{12}\pi + i \sin \frac{25}{12}\pi}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} = \cos \frac{25-1}{12}\pi + i \sin \frac{25-1}{12}\pi = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \left\{ \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \mid k \in \{0, 1\} \right\} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

sostituendo nell'equazione, posto $z = a + ib$, si ottiene

$$i(a - ib)^2 + a^2 + b^2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

$$i(a^2 - b^2) + 2ab + a^2 + b^2 = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2ab + a^2 + b^2 = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 - b^2 = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

v

$$\begin{cases} 2ab + a^2 + b^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 - b^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sottraendo
membro a membro
si ha

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab + 2b^2 = \frac{0}{2} \\ 2b(a+b) = 0 \end{cases}$$

v

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab + 2b^2 = 0 \\ 2b(a+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} b = -a \\ a^2 - a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} b = -a \\ a^2 - a^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$$

$\emptyset$

$\emptyset$

$\emptyset$

L'equazione ha solo 2 soluzioni reali $z = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

2. $ID = \mathbb{R}$

Per trovare estremi assoluti devo prima trovare

$$A_1 = \{ \text{pti critici di } f \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0 \}$$

$$A_2 = \{ \text{pti singolari di } f \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \nexists f'(x) \}$$

$$A_3 = \{ \text{pti estremi di } \mathbb{R} \} = \{ +\infty, -\infty \}$$

Cálculo

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$ID(y') = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Segun de

$$A_1 = \{0\} \quad A_2 = \{\pm 1\} \quad A_3 = \{+\infty, -\infty\}.$$

Por de $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ $f(\pm 1) = \arctan 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arctan \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

segun de

$$m = \min_{\mathbb{R}} f(x) = 0 \quad M = \max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

Por de per T. Bolzano el codominio de f é un intervalo (essendo f continua in $\mathbb{R}$ intervalo) si conclude de $f(\mathbb{R}) = [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$3. ID = \mathbb{R} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ |x|^3 - 3x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x \geq 0 \\ x(x^2 - 3x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x < 0 \\ x(-x^2 - 3x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} -2 < 0 \\ -1 < 0 \end{cases}$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{17}}{2} < 0 \\ \frac{3+\sqrt{17}}{2} > 0 \end{cases}$$

f non é ne par ne dispari

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x^2 - 3x - 2) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x(-x^2 - 3x - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3x - 2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \vee x > -1 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \text{ per } x > \frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x < -2 \vee -1 < x < 0$$

Asintoti verticali essendo f continua su $\mathbb{R}$

(3)

As. orizzontali essendo $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{|x|^3 - 3x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{|x|^3} = +\infty$

(trascuro gli infiniti di ordine minore)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[3]{|x|^3 - 3x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[3]{|x|^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \pm \frac{x}{x} = \pm 1 \text{ (eventuale coeff. ang.)}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 2x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right)^{1/3} - 1 \right]$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = -1$ N.B. $(1+y)^\alpha - 1 \sim \alpha y$ per $y \rightarrow 0$

$y = x - 1$ As. obliqua a $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x^3 - 3x^2 - 2x} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)^{1/3} - 1 \right]$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\frac{1}{3} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right) = -1$ $y = -x - 1$ As. obliqua a $-\infty$

Studio della derivata prima

$y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(|x|^3 - 3x^2 - 2x)^2}} (3x^2 \cdot \frac{x}{|x|} - 6x - 2)$ $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{x \mid |x|^3 - 3x^2 - 2x = 0\}$

così $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, \frac{3+\sqrt{17}}{2}, -2, -1\}$

$\lim_{x \rightarrow 0} y' = -\frac{2}{0^+} = -\infty$ $x=0$ pt a tangente verticale

$\lim_{x \rightarrow \frac{3+\sqrt{17}}{2}} y' = \frac{3 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{3+\sqrt{17}}{2} - 2}{0^+} = +\infty$ (il numeratore risulta > 0)

$\lim_{x \rightarrow -2} y' = \frac{-12 + 12 - 2}{0^+} = -\infty$ i 4 pt singolari di f sono tutti pt a tangente verticale

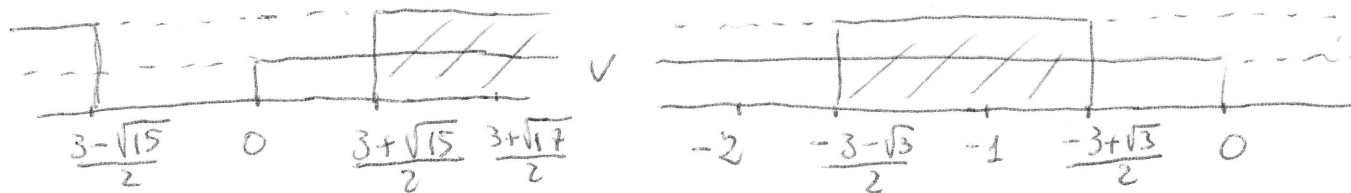
$\lim_{x \rightarrow -1} y' = \frac{-3 + 6 - 2}{0^+} = +\infty$

$y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 \cdot \frac{x}{|x|} - 6x - 2 > 0$ (poiché il denominatore è > 0) $\Leftrightarrow \forall x \in \text{ID}(y')$

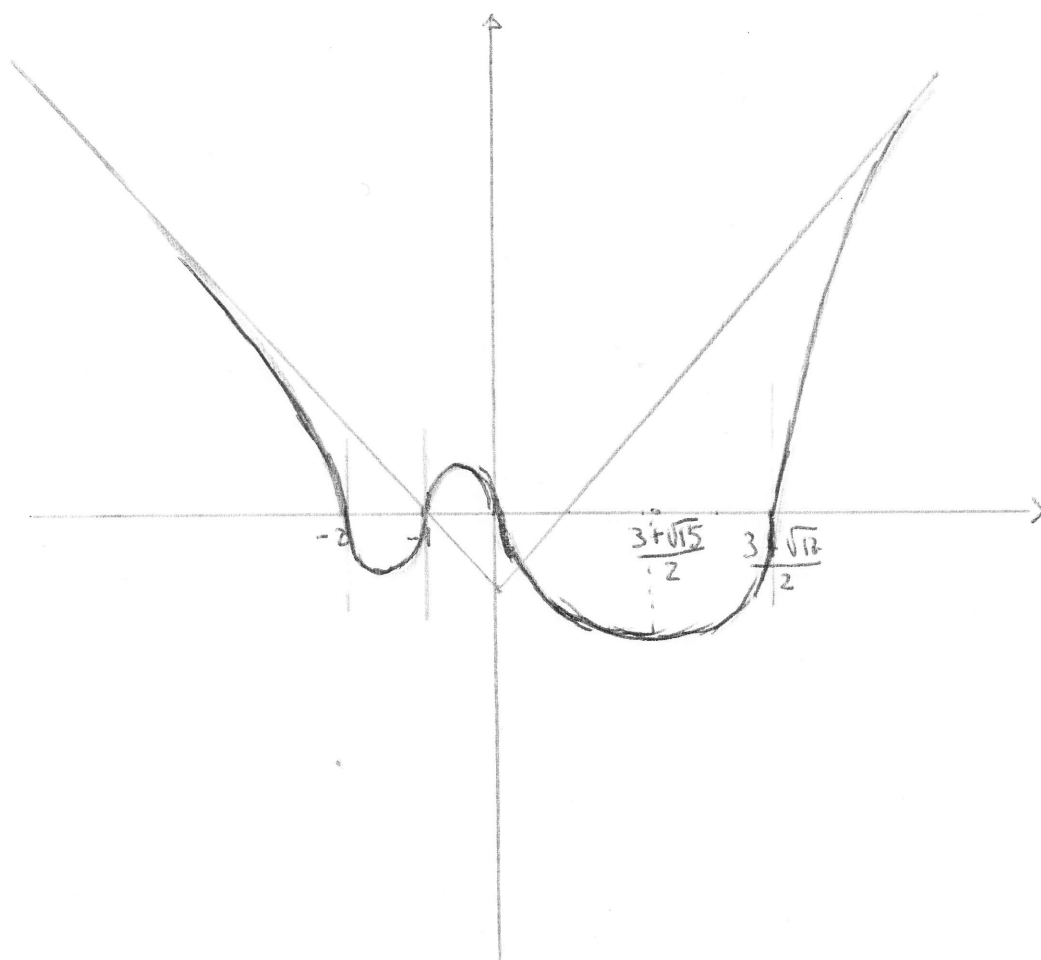
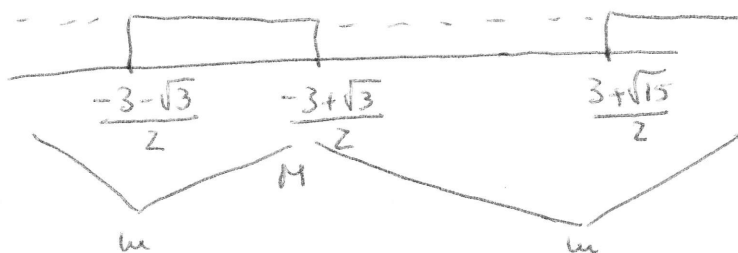
(4)

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0, x \neq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ 3x^2 - 6x - 2 > 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x < 0, x \neq -2, -1 \\ -3x^2 - 6x - 2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < \frac{3-\sqrt{15}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{15}}{2} \\ x > 0, x \neq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} \frac{3-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \\ x < 0, x \neq -2, -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$



conclusioni $y' > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3+\sqrt{15}}{2} \vee \frac{-3-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$



4. i) $\int \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x-1}{x+1} dx = \int D \left(-\frac{1}{x-1} \right) \cdot \log \frac{x-1}{x+1} dx = \text{integrando per parti} \quad (5)$

$$= -\frac{1}{x-1} \log \frac{x-1}{x+1} - \int -\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x-1}{(x+1)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x-1} \log \frac{x-1}{x+1} + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} dx$$

Per Heuristics:

$$\frac{2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{d}{dx} \frac{C}{x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} - \frac{C}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$2 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) - C(x+1)$$

Per $x=1$ $\begin{cases} -2C=2 \\ 4A=2 \\ A-B-C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-1 \\ A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$I = -\frac{1}{x-1} \log \frac{x-1}{x+1} + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int d \frac{-1}{x-1} dx$$

$$= -\frac{1}{x-1} \log \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \log |x+1| - \frac{1}{2} \log |x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

ii) $ID = (-\infty, -1[\cup]1, +\infty)$

f è integ. in s.i. in $[-2, -1[$ perché f ivi continua e

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{4} \lim_{y \rightarrow 0^+} \log y = -\infty$ con ord. comunque piccolo e quindi $< \alpha < 1$

f non è integ. in s.i. in $]1, 2]$ essendo

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x-1}{x+1} = -\infty$ con ordine $> 2 > 1$ (ma minore di $2+\varepsilon \forall \varepsilon > 0$)
 $\downarrow$
 $+\infty$ con ord 2 $\rightarrow -\infty$ con ord. lent. perché ord. proibito = somma degli ordini

f è integ. in s.i. in $[2, +\infty)$ perché f ivi continua e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \log \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \log \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \left(-\frac{2}{x+1} \right)$
 $\sim -\frac{2}{x+1}$
 $= 0$ con ordine $3 > 1$.