

Corso di laurea in Chimica -Traccia A

Esame-esonero di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

29 gennaio 2016

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$|z| + \bar{z} = \frac{1+2i}{1+i} - \frac{3}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{100}.$$

2. Studiare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \frac{\log(18 + 7x\sqrt{x} - x^3)}{\sqrt{|2^{x+2} - 2^{x+3}| - 8}}.$$

3. Studiare ordine di infinito (rispettivamente di infinitesimo) per $x \rightarrow 0$ (rispettivamente $x \rightarrow \infty$) della seguente funzione

$$\log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \sin^2 \left(\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x^3}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = 6e^{-x} - x + 2 \log |e^x - 1|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + 1}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio o in senso classico, giustificando la risposta, negli intervalli $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[\pi, \frac{3}{2}\pi[$.

N.B. Coloro che hanno superato il primo esonero devono fare solo gli ultimi 3 esercizi.

Svolgimento

1. Poiché $\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{1+2i-i-2i^2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$$\frac{3}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{100} = \frac{3}{2} (\cos 50\pi + i \sin 50\pi) = \frac{3}{2} (\cos 0 + i \sin 0) = \frac{3}{2},$$

l'equazione diventa

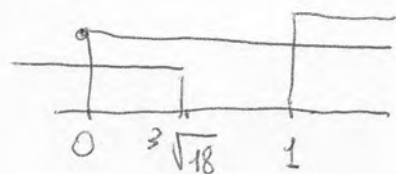
$$|z| + \bar{z} = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} + a - ib = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} + a = 0 \\ -b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \geq 0 \\ a^2 + \frac{1}{4} = a^2 \end{cases} \quad \emptyset$$

L'equazione non ha soluzioni

2. $\begin{cases} 18 + 7\sqrt{x} - x^3 > 0 \\ |2^{x+2} - 2^{x+3}| > 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 7\sqrt{x^3} - 18 < 0 \\ |4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x| > 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 7\sqrt{x^3} > x^3 - 18 \\ |1 - 4 \cdot 2^x| > 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^3 - 18 < 0 \\ x^3 \geq 0 \\ 2^x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 - 8 \geq 0 \\ 49x^3 > (x^3 - 18)^2 \\ 2^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{18} \\ x \geq 0 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{18} \\ x^6 - 85x^3 + 324 < 0 \\ x > 1 \end{cases}$$



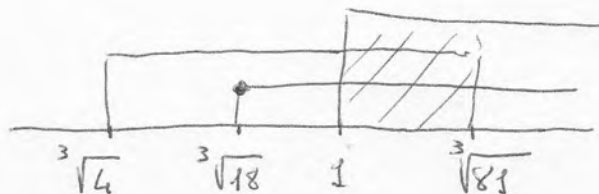
$\emptyset$

Poiché $x^3 = t$

$$t_{1/2} = \frac{85 \pm \sqrt{85^2 - 324 \cdot 4}}{2}$$

$$= \frac{85 \pm 77}{2} = \begin{cases} 4 \\ 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt[3]{18} \\ \sqrt[3]{4} < x < \sqrt[3]{81} \\ x > 1 \end{cases}$$



$$ID =]1, \sqrt[3]{81}[$$

3. Per $x \rightarrow 0$ $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ e quindi

$$\lg(1 + \frac{1}{x^2}) \rightarrow +\infty \text{ con ordine comunque piccolo}$$

$$\sin^2 \frac{1}{x^2} \text{ è una funzione limitata}$$

$$\frac{1}{x^3} \rightarrow +\infty \text{ con ordine } 3$$

Per il principio di sostituzione degli infiniti possiamo trascurare gli infiniti più bassi, e quindi la quantità limitata, e concludere che l'ordine di infinito è 3.

Per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ e quindi

$\lg(1 + \frac{1}{x^2}) \sim \frac{1}{x^2}$ infinitesimo di ordine 2

$\sin^2(\frac{1}{x^2}) \sim (\frac{1}{x^2})^2 = \frac{1}{x^4}$ infinitesimo di ordine 4

$\frac{1}{x^3}$ infinitesimo di ordine 3

Per il principio di sostituzione degli infinitesimi posso trascurare quelli più veloci e concludere che l'ordine di infinitesimo è 2.

4. ID $|e^x - 1| > 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ ID = $\mathbb{R}^*$

Però $f(-x) = 6e^x + x + 2\lg|e^{-x} - 1| \neq f(x)$ f né pari né
dispari

$f(x) > 0$ non si può studiare facilmente; dedurremo poi la positività dal grafico

Asintoti

$\lim_{x \rightarrow 0} 6e^{-x} - x + 2\lg|e^x - 1| = \lim_{y \rightarrow 0^+} \lg y = -\infty$ $x = 0$ A.V.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{-x} - x + 2\lg|e^x - 1| = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{-x} - x + 2x = +\infty$ $\nexists$ A.O. $a + \infty$
 $\downarrow$
 $e^x - 1 \sim \lg x$ e quindi $\lg|e^x - 1| \sim \lg e^x = x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{-x} - x + 2\lg|e^x - 1| = +\infty + \infty = +\infty$ $\nexists$ As. obliquo a $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6e^{-x} - x + 2\lg|e^x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6e^{-x}}{x} + \frac{-x + 2x}{x} = 1$ (m)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{-x} - x + 2\lg|e^x - 1| - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{-x} - 2x + 2x = 0$ (q)

$y = x$ As. obliquo a $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6e^{-x} - x + 2\lg|e^x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6e^{-x}}{\underbrace{x}_{\rightarrow +\infty}} + \frac{-x + 2x}{x} = +\infty$
 $\nexists$ As. obliquo a $-\infty$

Studio della derivata 1°

$$y' = -6e^{-x} - 1 + \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{-6e^{-x}(e^x - 1) - e^x + 1 + 2e^x}{e^x - 1}$$

$$= \frac{-6 + 6e^{-x} + e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - 5e^x + 6}{e^x(e^x - 1)}$$

$$ID(y') = ID(y) = \mathbb{R}^*$$

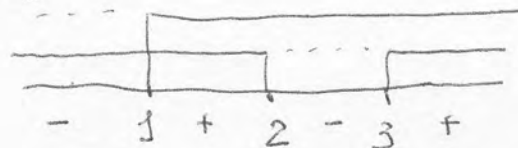
$$y' > 0 \quad \frac{e^{2x} - 5e^x + 6}{e^x(e^x - 1)} > 0 \quad N > 0 \quad e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$$

$$e^x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$e^x < 2 \vee e^x > 3$$

$$D > 0 \quad e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$



$$y' > 0 \quad \forall x > 1 < e^x < 2 \vee x > 3$$

ovvero

$$0 < x < \lg 2 \vee x > \lg 3$$



$$M \begin{cases} x = \lg 2 \end{cases}$$

$$y = \frac{6}{2} - \lg 2 + 2 \lg |2 - 1| = 3 - \lg 2 \approx 2,7$$

$$M \begin{cases} x = \lg 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{6}{3} - \lg 3 + 2 \lg |3 - 1| = 2 + \lg 4 - \lg 3 \approx 3,13$$

Studio della derivata II^a

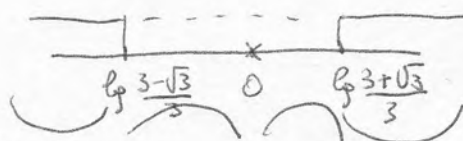
$$y'' = D \left(-6e^{-x} - 1 + \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) = 6e^{-x} + 2 \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{6}{e^x} + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{6(e^x - 1)^2 + 2e^{2x}}{e^x(e^x - 1)^2} = \frac{2(2e^{2x} - 6e^x + 3)}{e^x(e^x - 1)^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 6e^x + 3 > 0$$

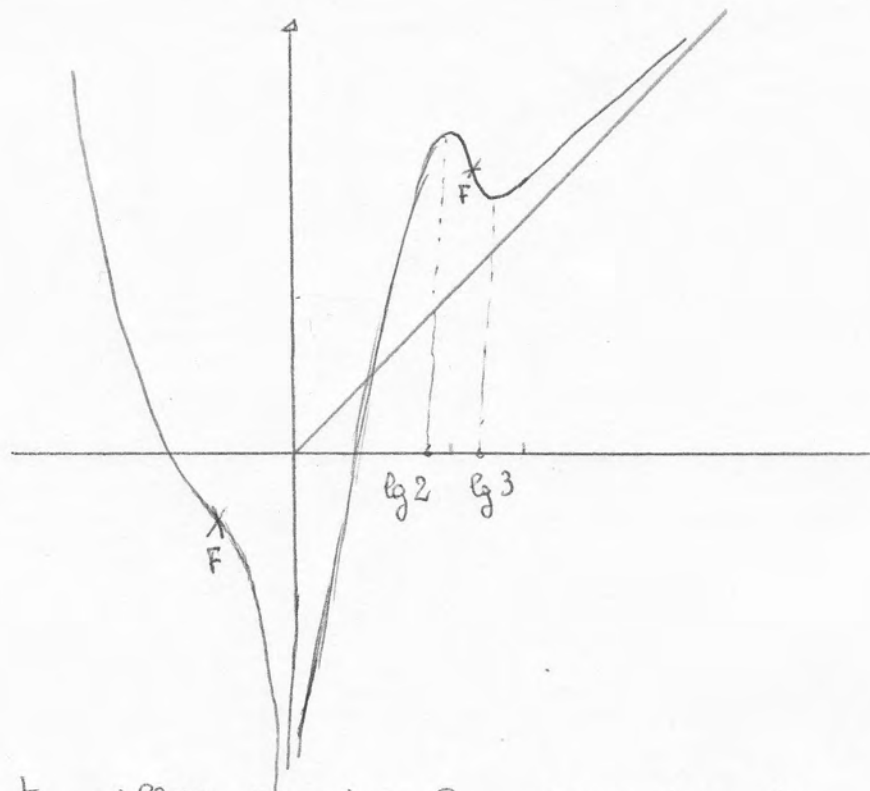
$$e^x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$e^x < \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \vee e^x > \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$



$$x < \lg \frac{3 - \sqrt{3}}{2} < 0 \vee x > \lg \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \approx 0,37$$

N.B. Poiché $0,3 \in] \lg 2, \lg 3[$ il pto di flesso si trova tra il massimo e il minimo relativo di f mentre l'altro ha ascisse < 0 .



(4)

5. i) Posto $\sin x = t$ differenziando si ha $\cos x dx = dt$ e sostituendo

$$\int \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + 1} dx = \int \frac{t^4}{t^3 + 1} dt = \int \left(t - \frac{t}{t^3 + 1} \right) dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - \int \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} dt$$

Per la formula di Heaviside:

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{(A+B)t^2 + (-A+B+C)t + A+C}{t^3+1}$$

Dal principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -A-A-A=1 \\ C=-A \end{cases} \quad \begin{matrix} B=\frac{1}{3} \\ A=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\int \frac{t}{t^3+1} dt = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = -\frac{1}{3} \lg|t+1| + \frac{1}{3} \int \frac{2t+2-1+1}{t^2-t+1} dt$$

$$= -\frac{1}{3} \lg|t+1| + \frac{1}{6} \lg(t^2-t+1) + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt$$

$$= -\frac{1}{3} \lg|t+1| + \frac{1}{6} \lg(t^2-t+1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dt$$

$$= -\frac{1}{3} \lg|t+1| + \frac{1}{6} \lg(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c$$

Ricordando che $t = \sin x$ si conclude che

(5)

$$\int \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + 1} dx = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{3} \lg(\sin x + 1) + \frac{1}{6} \lg(\sin^2 x - \sin x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

ii) Poiché $g(x) = \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + 1}$ è continua nel suo insieme di definizione $= \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\}$

segue che g è integrabile in senso classico in $[0, \frac{\pi}{2}]$ perché continua in un intervallo chiuso e limitato.

Per vedere se è integrabile (e in che senso) in $[\pi, \frac{3}{2}\pi[$ calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} \frac{\sin^4 x \cos x}{\sin^3 x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} \sin^4 x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x + 1} = -\infty \text{ con ordine 1}$$

$x - \frac{3}{2}\pi = y$

In fatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} \frac{\cos x}{\sin^3 x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} \frac{\cos x}{\sin x + 1} \cdot \frac{1}{\sin^2 x - \sin x + 1} = \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos(y + \frac{3}{2}\pi)}{\sin(y + \frac{3}{2}\pi) + 1} \\ &\quad \downarrow \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin y}{-\cos y + 1} = \frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\frac{1}{2}y^2} = -\infty \text{ con ordine 1} \end{aligned}$$

Segue che g non è integrabile in senso improprio in $[\pi, \frac{3}{2}\pi[$

essendo $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} g(x) = -\infty$ con ord. 1.