

Corso di laurea triennale in Chimica

Esonero di Istituzioni di Matematiche I

Traccia B

7 Gennaio 2016

1. Dopo aver risolto nel campo complesso la seguente equazione

$$z^5 |z| + (i - 1)^{10} + 32 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \right)^6 = i^{87} z,$$

calcolare somma e prodotto delle soluzioni trovate.

2. Studiare dominio, codominio (giustificando la risposta ma senza studiare estremi relativi) e positività della funzione

$$f(x) = \left(\log_{\frac{1}{3}} (\ln^2 x^2 - 3 \ln |x|) \right) \sqrt{\log_2 |8x| - 3}.$$

3. Studiare asintoti della funzione

$$g(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + x}}.$$

4. Data la funzione

$$h(x) = \begin{cases} \tan^2(x \ln x) & x > 0 \\ \alpha & x = 0 \\ \alpha \left(\sqrt[5]{\frac{x^5 - x}{x^5 + x}} + 1 \right) & x < 0 \end{cases},$$

studiarne al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ continuità e differenziabilità, precisando se ci sono valori di α per cui $h \in C^1(\mathbf{R})$.

Svolgimento

Poiché
 $(i-1)^{10} = ((i-1)^2)^5 = (i^2 + 1 - 2i)^5 = -32i^5 = -32i$

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \right)^6 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) \right)^6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{12} + i \sin 6 \cdot \frac{\pi}{12} = i$$

$$i^{87} = (i^4)^{21} \cdot i^3 = 1^{21} \cdot i^3 = -i$$

2ª equazione di Jensen

$$z^5 |z| - 32i + 32i = -iz \Leftrightarrow z(z^4 |z| + i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 |z| = -i$$

Posto $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ e poiché $-i = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi$ si ha

$$\rho^5 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 4\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

per $k=0$: $\theta_0 = \frac{3}{8}\pi \Rightarrow z_0 = \cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi$

per $k=1$: $\theta_1 = \frac{7}{8}\pi \Rightarrow z_1 = \cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi$

per $k=2$: $\theta_2 = \frac{11}{8}\pi \Rightarrow z_2 = -z_0$

per $k=3$: $\theta_3 = \frac{15}{8}\pi \Rightarrow z_3 = -z_1$

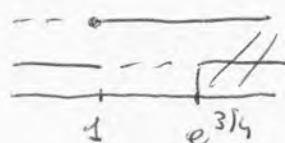
Per $k=4$ si ritrova z_0 e così via

L'equazione ha dunque 5 soluzioni: $0, \pm (\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi), \pm (\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi)$.

Segue che somma = 0 (poiché $z_2 = -z_0$ e $z_3 = -z_1$)
 prodotto = 0 (poiché una sol. è 0)

$$2. \begin{cases} \ln^2 x^2 - 3 \ln |x| > 0 \\ \log_2 |8x| - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\ln |x|)^2 - 3 \ln |x| > 0 \\ \log_2 |8x| \geq \log_2 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \ln^2 |x| - 3 \ln |x| > 0 \\ |8x| \geq 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln |x| < 0 \vee \ln |x| > \frac{3}{4} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \vee |x| > e^{3/4} \\ |x| \geq 1 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow |x| > e^{3/4} \quad \text{ID} = (-\infty, -e^{3/4}] \cup [e^{3/4}, +\infty)$$

2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{3}} y \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2]{8x - 2} = -\infty$$
$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}}(b^2 x^2 - 3 \ln|x|) \geq 0 \quad (\text{pour } \sqrt{\log_2 |8x| - 3} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{D})$$

$$(\Rightarrow) 0 < \ln^2 x^2 - 3 \ln |x| \leq 1 \Leftrightarrow |x| \in \mathbb{D}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in]-\infty, e^{3/4}] \cup]e^{3/4}, +\infty) \\ -\frac{1}{2} \leq \ln(x) \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \int x < -e^{3/4} \vee x > e^{3/4}$$

$$\left(e^{-\frac{1}{4}} \leq x \leq e \vee -e \leq x \leq -e^{-\frac{1}{4}} \right)$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in [-e, -e^{3/4}] \cup [e^{3/4}, e].$$

3. Presenza di tutto studio il dominio di g :

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2 + x} \neq 0 \\ x^2 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \sqrt{x^2 + x} \\ x \leq -1 \vee x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x} \neq \cancel{x} + x \\ x \geq 0 \\ x \leq -1 \vee x \geq 0 \end{cases} \quad x \neq 0 \quad \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 0$$

$$ID = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + \sqrt{x^2 + x})}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -(x + \sqrt{x^2 + x}) = 0 \quad \text{A2.5er}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ As $\omega \rightarrow \infty$ horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x + \sqrt{x^2 + x})}{x^2 - x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} - (x + \sqrt{x^2 + x}) = -\infty \quad \nexists \text{ As. obliq. a } +\infty$$

cerco asintoti obliqui a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{-x} = -2 \quad (\text{eventuale coeff. angolare as. obliquo})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x - \sqrt{x^2 + x}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - \sqrt{x^2 + x} + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}})} = -\frac{1}{2} \quad (q) \quad y = -2x - \frac{1}{2}$$

as. obliquo a $+\infty$

4. La funzione h è definita in $\mathbb{R}$ perché per $x < 0$ si ha

$$x^5 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^4 + 1) \neq 0 \quad \forall x < 0$$

h è continua (e derivabile) $\forall x \neq 0$ perché composta da funzioni continue (risp derivabili). Studio la continuità per $x = 0$. Perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg^2(x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{essendo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sqrt[5]{\frac{x(x^4 - 1)}{x(x^4 + 1)}} + 1 \right)^\alpha = (-1 + 1)^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

per gli ordini

segue che $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$

Conclusione: se $\alpha = 0$ h è continua in $x = 0$ (e quindi su tutto $\mathbb{R}$)

se $\alpha \neq 0$ h ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$.

Studio ora la derivabilità di h per $x = 0$ nel caso $\alpha = 0$

(se $\alpha \neq 0$ h non è continua in $x = 0$ e quindi non è neppure derivabile).

(4)

Perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg^2(x \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\lg^2(x \ln x)}{(x \ln x)^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{x \ln^2 x}{x}}_{0 \text{ per gli ordini}} = 0$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

segue che $h'_+(0) = 0 = h'_-(0)$ e quindi h è derivata in $x = 0$ con $h'(0) = 0$ (nel caso $\alpha = 0$). Vediamo se $h \in C^1(\mathbb{R})$. Si ha

$$h'(x) = \begin{cases} 2 \lg(x \ln x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x \ln x)} (\ln x + 1) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \overbrace{\lg(x \ln x)}^{\nearrow 0} \cdot \overbrace{\cos(x \ln x)}^{\nearrow 1} \cdot \overbrace{(\ln x + 1)}^{\nearrow -\infty} = 0$$

(perché $\lg(x \ln x) \cdot \ln x \sim x \ln^2 x \rightarrow 0$ per gli ordini)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

segue che $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = h'(0) = 0$ e cioè $h \in C^1(\mathbb{R})$.

N.B. Per provare che $h \in C^1(\mathbb{R})$ si può applicare direttamente il corollario del Teor. di l'Hôpital senza trovare prima la derivata come limite del rapporto incrementale.