

Corso di laurea triennale in Chimica

Esonero di Istituzioni di Matematiche I

Traccia A

7 Gennaio 2016

1. Dopo aver risolto nel campo complesso la seguente equazione

$$z^3 |z| + (i - 1)^{12} - 64i \left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \right)^6 = i^{99} z,$$

calcolare somma e prodotto delle soluzioni trovate.

2. Studiare dominio, codominio (giustificando la risposta ma senza studiare estremi relativi) e positività della funzione

$$f(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} \left(\ln^2 x^2 - 3 \ln |x| \right) \right) \sqrt{\log_3 |9x| - 2}.$$

3. Studiare asintoti della funzione

$$g(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}}.$$

4. Data la funzione

$$h(x) = \begin{cases} \sin^2(x \ln x) & x > 0 \\ \alpha & x = 0 \\ \alpha \left(\sqrt[5]{\frac{x^5 - x^2}{x^5 + x^2}} + 1 \right) & x < 0 \end{cases},$$

studiarne al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ continuità e differenziabilità, precisando se ci sono valori di α per cui $h \in C^1(\mathbf{R})$.

Svolgimento

1. Poiché $(i-1)^{12} = ((i-1)^2)^6 = (i^2 + 1 - 2i)^6 = (-2 + 2i)^6 = 64 i^6 = 32 i^4 \cdot i^2 = -64$,

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \right)^6 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) \right)^6 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = i,$$

$$i^{99} = i^{96} \cdot i^3 = (i^4)^{24} \cdot i^3 = 1^{24} \cdot (-1) \cdot i = -i,$$

l'equazione diventa

$$z^3 |z| - 64 - 64 i^2 = -i z \quad \Leftrightarrow \quad z(z^2 |z| + i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \vee z^2 |z| = -i$$

Poiché $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ e poiché $-i = \cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi$, si ha

$$\rho^3 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 2\theta = \frac{3}{2} \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{3}{4} \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Per $k=0$: $\theta_0 = \frac{3}{4} \pi \Rightarrow z_0 = \cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per $k=1$: $\theta_1 = \frac{7}{4} \pi \Rightarrow z_1 = \cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per $k=2$ si ritrova z_0 e così via.

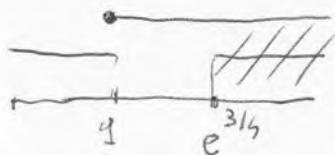
L'equazione ha dunque 3 soluzioni: $0, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Segue che $\text{somma} = 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$\text{prodotto} = 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

2. $\begin{cases} \ln^2 x^2 - 3 \ln |x| > 0 \\ \log_3 |9x| - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 \ln |x|)^2 - 3 \ln |x| > 0 \\ \log_3 |9x| \geq \log_3 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \ln^2 |x| - 3 \ln |x| > 0 \\ |9x| \geq 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln |x| < 0 \vee \ln |x| > \frac{3}{4} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < |x| < 1 \vee |x| > e^{3/4} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$|x| > e^{3/4} \Leftrightarrow x < -e^{3/4} \vee x > e^{3/4}$$

$$ID = (-\infty, -e^{3/4}] \cup [e^{3/4}, +\infty)$$

Poiché f è pari, per studiare il codominio basta calcolare i valori che assume in $]e^{3/4}, +\infty)$ cioè trovare $f(]e^{3/4}, +\infty))$.

Essendo $\lim_{x \rightarrow e^{3/4}} f(x) = \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{2}} y \right) \cdot \sqrt{\log_3 |9e^{3/4} - 2|} = +\infty$
 " $\log_{\frac{1}{2}} y + \log_{\frac{1}{2}} e^{3/4} - 2 > 0$

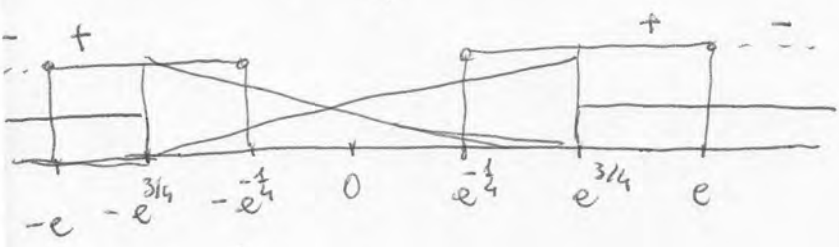
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} y \right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\log_3 |9x - 2|} = -\infty$
 " $-\infty$ " $+\infty$

per Teor. di Bolzano $f(]e^{3/4}, +\infty))$ è l'intervallo di estremi $-\infty$ e $+\infty$, e quindi il codominio di f coincide con $\mathbb{R}$.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (4x^2 - 3 \ln|x|) \geq 0$ (poiché $\sqrt{\log_3 |9x - 2|} \geq 0 \forall x \in ID$)

$\Leftrightarrow 0 \leq 4x^2 - 3 \ln|x| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in ID \\ 4 \ln^2|x| - 3 \ln|x| - 1 \leq 0 \end{cases}$ $\frac{3 \pm 5}{8} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -e^{3/4}[\cup]e^{3/4}, +\infty) \\ -\frac{1}{4} \leq \ln|x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -e^{3/4} \vee x > e^{3/4} \\ e^{-1/4} \leq x \leq e \vee -e \leq x \leq -e^{-1/4} \end{cases}$



$f(x) > 0 \quad \forall x \in [-e, -e^{3/4}[\cup]e^{3/4}, e]$

3. Studio prima di tutto le dominio di g :

$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - x} \neq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} \neq -x \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \neq x^2 \\ -x \geq 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee x \geq 1$

$ID = (-\infty, 0[\cup]1, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x - \sqrt{x^2 - x})}{x^2 - x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - \sqrt{x^2 - x} = 0 \quad \nexists \text{ As. Vert.}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{-\infty}{-\infty + \infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x}}{x^2 - x} = -\infty$ ~~As. obliq. a $-\infty$~~
razionalizzo come prima

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})} = \frac{1}{2}$

(oppure per gli ordini: $y = \frac{1}{2}$ As. obliq. a $+\infty$)
 $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + x} = \frac{1}{2} \right)$

Cerco asintoti obliqui a $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{x + \sqrt{x^2 - x}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x}}{x^2 - x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})}{\cancel{x}} = 2$ (essenziale coeff angolare as. obliquo)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - x} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x + \sqrt{x^2 - x}) =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{x^2 - x^2 + x}{x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{x}{x - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})} = -\frac{1}{2} \quad (9)$

$y = 2x - \frac{1}{2}$ asintoto obliquo a $-\infty$

4. La funzione h è definita in $\mathbb{R} - \{-1\}$ poiché per $x < 0$ va posto il denominatore $x^5 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

h è sicuramente continua $\forall x \neq 0$ poiché composta di funz. continue. Studiamo la continuità per $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^2(x \ln x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sin^2 y = 0$ essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\sqrt[5]{\frac{x^2(x^3 - 1)}{x^2(x^3 + 1)}} + 1 \right)^\alpha = (-1 + 1)^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ per gli ordini

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$ si ha che $\exists \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$

Conclusione: h è cont. anche in $x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ mentre $\forall \alpha \neq 0$ h ha pt di discontinuità eliminabile in $x = 0$

Per $x \neq 0$ h è sempre derivabile nel suo dominio, essendo composta di funzioni derivabili. Per $x = 0$ h può essere derivabile solo nel caso $\alpha = 0$ in cui è continua essendo la continuità condizione necessaria per la derivabilità.

Studiamo allora la derivabilità in $x = 0$ di h quando $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Perché } h'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x \ln x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\sin^2(x \ln x)}{(x \ln x)^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{x \ln^2 x}{x}}_0 = 0 \quad \text{per gli ordini} \end{aligned}$$

$$e \quad h'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

segue che h è derivabile in $x = 0$ con $h'(0) = 0$ (se $\alpha = 0$).

Inoltre, sempre se $\alpha = 0$, h è di classe C^1 nel suo dominio (che però è $\mathbb{R} - \{1\}$ e non $\mathbb{R}$) essendo

$$h'(x) = \begin{cases} 2 \sin(x \ln x) \cos(x \ln x) \cdot (\ln x + 1) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \overset{\nearrow 0}{\sin(x \ln x)} \overset{\nearrow 1}{\cos(x \ln x)} \cdot \overset{\nearrow -\infty}{(\ln x + 1)} = 0$$

(essendo $\sin(x \ln x) \cdot \ln x \sim x \ln^2 x \rightarrow 0$ per gli ordini)

$$e \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$$e \text{ quindi } \lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = h'(0) = 0$$

N.B. Per provare che h è di classe C^1 si può anche applicare direttamente il Corollario del Teo. di L'Hôpital e saltare il conto diretto della derivata come limite del rapporto incrementale -