

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

10 dicembre 2015

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso (si consiglia di usare la forma trigonometrica)

$$z^6 = (1 + i\sqrt{3})\bar{z}^3.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x + 4 \arctan \sqrt{|x-1|}$$

e disegnarne il grafico qualitativo (si può omettere lo studio della derivata seconda).

3. Trovare il dominio della funzione

$$g(x) = \sqrt{\frac{\lg_{\frac{1}{2}}(3 + x - \sqrt{2x^2 - x - 1} + 1)}{\pi - 3 \arccos x}}.$$

4. Data la funzione

$$h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2+x-1}},$$

i) calcolare l'integrale generale;

ii) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso classico o in senso improprio negli intervalli $[0, \frac{1}{2}]$, $[0, 1[$ e $[2, +\infty)$.

5. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{-x^2} + \sin x \cos x) + e^x - 1}{e^{x - \sin x \cos x} - 1}.$$

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ si ha $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

$$z^6 = \rho^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta) \quad 1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad \bar{z}^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta))$$

L'equazione diventa

$$\rho^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \rho^3(\cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta)) \Leftrightarrow$$

$$\rho^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = 2\rho^3(\cos(\frac{\pi}{3} - 3\theta) + i \sin(\frac{\pi}{3} - 3\theta)) \Leftrightarrow$$

$$\rho^6 = 2\rho^3 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} \ni 6\theta = \frac{\pi}{3} - 3\theta + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{27} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{27} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ \rho &= \sqrt[3]{2} \quad \theta = 0 \quad z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{\pi}{27} + i \sin \frac{\pi}{27}\right) \end{aligned}$$

$$\theta = 1 \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{7}{27}\pi + i \sin \frac{7}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 2 \quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{13}{27}\pi + i \sin \frac{13}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 3 \quad z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{19}{27}\pi + i \sin \frac{19}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 4 \quad z_4 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{25}{27}\pi + i \sin \frac{25}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 5 \quad z_5 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{31}{27}\pi + i \sin \frac{31}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 6 \quad z_6 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{37}{27}\pi + i \sin \frac{37}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 7 \quad z_7 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{43}{27}\pi + i \sin \frac{43}{27}\pi\right)$$

$$\theta = 8 \quad z_8 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{49}{27}\pi + i \sin \frac{49}{27}\pi\right)$$

Per $\theta = 9$ si ottiene z_0 (essendo $z_9 = \sqrt[3]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{27} + 2\pi) + i \sin(\frac{\pi}{27} + 2\pi)\right)$).

L'equazione ha dunque 10 soluzioni, $z = 0$ e $z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{27} + \frac{2}{9}k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{27} + \frac{2}{9}k\pi)\right)$ con $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$.

2. $ID = \mathbb{R}$ f non è né pari né dispari

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \cdot \arctan 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi \end{cases}$$

$f(x) = 0$ ma si sa studiare direttamente al pari di $f(x) > 0$. Sicuramente f è possibile per $x > 0$, ma solo dal grafico dedurremo la possibilità.

Asintoti

✓ asintoti verticali essendo f continua su tutto $\mathbb{R}$.

✓ asintoti orizzontali poiché $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$

Asintoti obliqui

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{4 \operatorname{arctg} \sqrt{|x-1|}}{x} \right) = 1 \quad (m)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 4 \operatorname{arctg} \sqrt{|x-1|} = \frac{2}{1} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad (q)$$

$$y = x + 2\pi \quad \text{As. obliquo a } \pm \infty.$$

Studio della derivata I°

$$y' = 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{x-1}{(x-1)} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ 1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} = +\infty$$

$x = 1$ pto di cuspid

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -\infty$$

$$\text{perche' } f'_+(1) = +\infty \\ f'_-(1) = -\infty$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 + \frac{2}{x\sqrt{x-1}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ 1 - \frac{2}{(2-x)\sqrt{1-x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ (2-x)\sqrt{1-x} > 2 \end{cases}$$

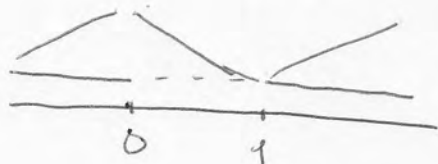
$$x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{(2-x)^2(1-x)} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ x^3 - 5x^2 + 8x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

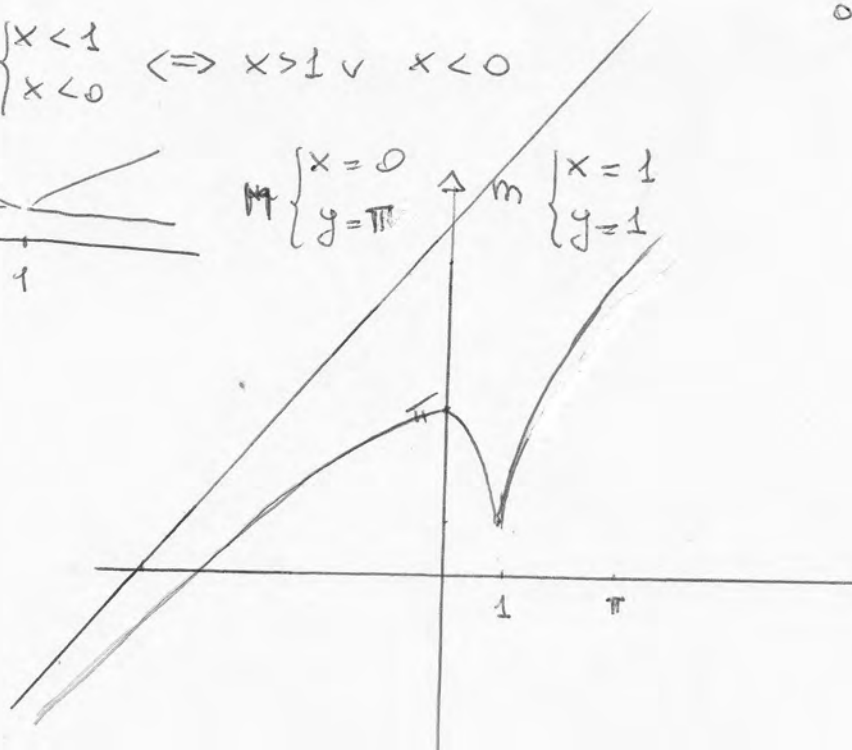
$$(\text{si vuole da } 2-x > 0 \text{ essendo } x < 1) \quad x(x^2 - 5x + 8) < 0$$

$$\Delta < 0 \quad \forall x \text{ poiche' } \Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0$$



$$M \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$



$$3. \quad \frac{\log_{\frac{1}{2}}(3+x-\sqrt{2x^2-x-1})}{\pi-3\arccos x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_{\frac{1}{2}}(4+x-\sqrt{2x^2-x-1})}{\pi-3\arccos x} \geq 0$$

Studio prima il dominio di questa frazione e poi all'interno del dominio se studio il segno.

$$\begin{cases} 4+x-\sqrt{2x^2-x-1} \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \sqrt{2x^2-x-1} \leq 4+x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1 \geq 0 \\ 4+x \geq 0 \\ 2x^2-x-1 \leq 16+x^2+8x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \geq -4 \\ x^2-9x-17 \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \frac{9-\sqrt{149}}{2} \leq x \leq \frac{9+\sqrt{149}}{2}$$

Poiché la frazione non è mai definita, si conclude che $\emptyset$

$$ID(g) = \emptyset$$

4. Studio per prima cosa il dominio di h:

$$\begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x-x^2} \neq -x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x-x^2 \neq (-x+1)^2 \\ -x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x-x^2 \neq x^2+1-2x \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$ID = [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$$

Posso $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x^2 \frac{1-x}{x}} = x \sqrt{\frac{1-x}{x}} = xt$ cioè $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$

si ha $1-x = t^2 x \quad (1+t^2)x = 1 \quad x = \frac{1}{1+t^2} \quad dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} dx = - \int \frac{\frac{1}{1+t^2} + 1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt = \int \frac{(2+t^2)t}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{t(1-t)} dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2+2}{(t^2+1)^2(t-1)} dt = 2 \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{D}{dt} \frac{Dt+E}{t^2+1} \right) dt$$

lascio le costanti indicate eizzo integrando.

$$= 4 \log|t-1| + B \log(t^2+1) + 2 \operatorname{arctg} t + 2 \frac{Dt+E}{t^2+1} + \text{cost.}$$

ii) Poiché $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} |f(x)| = +\infty$ studiamo l'ordine di infinito. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x+1)(\sqrt{x-x^2} - x + 1)}{x-x^2 - (x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x+1)(\sqrt{x-x^2} - x + 1)}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{0^+} = +\infty$$

con ordine di infinito = 1 (= ordine di infinitesimo di $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 1)$ per $x \rightarrow 1$)

si ha che f non è integrabile in s.i. in $[0, \frac{1}{2}[$ e quindi non lo è neppure in $[0, 1[$. Infine non lo è in $[\frac{1}{2}, +\infty)$ non essendo definita in tale intervallo.

5. Poiché per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned} \ln(e^{-x^2} - 1 + 1 + \sin x \cos x) &\sim e^{-x^2} - 1 + \sin x \cos x \\ e^{-x^2} - 1 &\sim -x^2, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \sim \frac{1}{2} 2x \\ e^{x - \sin x \cos x} - 1 &\sim x - \sin x \cos x \sim x - \frac{1}{2} \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) \right) \\ &\sim \frac{2}{3} x^3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{essendo } \ln(1+y) \sim y \text{ se } y \rightarrow 0 \\ e^y - 1 \sim y \\ \sin y \sim y \end{array} \right.$$

l'equante diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + x + x}{\frac{2}{3} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{2x}{2x^3} = +\infty$$

trascurando x^2 infinitesimo di ordine maggiore risp a x

per formula di Taylor del seno arrestata al 2° ordine