

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

18 settembre 2015

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$|z|^2 \bar{z}^2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^8.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{4-x^2}{4+x^2} \right) + \frac{3}{4} |x|$$

e disegnarne il grafico qualitativo. Dire poi, giustificando la risposta, se f è iniettiva, surgettiva, continua, derivabile.

3. Trovare il dominio della funzione

$$g(x) = \sqrt{\frac{2^{3x} - 2^{2x+1} - 2^{x+3}}{\ln_3 2 |x| + \ln_3 3 |x| + \ln_3 4 |x| - 1}}.$$

4. Data la funzione

$$h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2+x-1}},$$

i) calcolare l'integrale generale;

ii) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso classico o in senso improprio negli intervalli $[0, 1[$, $[0, \frac{1}{2}]$ e $[3, +\infty)$.

5. Determinare ordine e parte principale per $x \rightarrow 0$ di

$$\ln(e^{-x^2} + \sin x + \cos x - 1) + 1 - e^x.$$

Solgimento

1. Poiché $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^8 = \left(\frac{1-i^2-2i}{1-i^2}\right)^8 = (-i)^8 = ((-i)^2)^4 = (-1)^4 = 1,$

l'equazione diventa, posto $z = a+ib$

$$|z|^2 \bar{z}^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2+b^2)(a-ib)^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2+b^2)(a^2-i^2b^2-2abi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a^2+b^2)(a^2-b^2) = 1 \\ -2ab(a^2+b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b^4 = 1 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^4 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$\emptyset$ $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}$

L'equazione ha due radici reali $z_{1/2} = \pm 1$.

2. ID: $-1 \leq \frac{4-x^2}{4+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -4-x^2 \leq 4-x^2 \leq 4+x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq 4 & \forall x \\ -x^2 \leq x^2 & \forall x \end{cases}$

ID = $\mathbb{R}$ Poiché $f(-x) = f(x)$, f è pari e quindi studiamo f per $x \geq 0$ e poi ne ribaltiamo il grafico rispetto all'asse y .

Per $x \geq 0$: $f(x) = \arcsin \frac{4-x^2}{4+x^2} + \frac{3}{4}x$ $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

Per ora solo lo studio delle equazioni $f(x) = 0$ e della diseq. $f(x) > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arcsin(-1) + \infty = +\infty$ $\nexists$ asintoti orizz. a $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{4-x^2}{4+x^2} + \frac{3}{4}x}{x} = \frac{3}{4}$

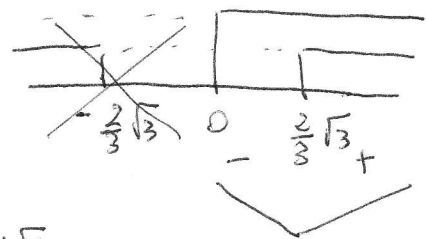
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{3}{4}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{4-x^2}{4+x^2} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{2}$
As. obliquo a $+\infty$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(4+x^2) - 2x(4-x^2)}{(4+x^2)^2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4+x^2}{\sqrt{(4+x^2)^2 - (4-x^2)^2}} \cdot \frac{-16x}{(4+x^2)^2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4x} \cdot \frac{-16x}{4+x^2} + \frac{3}{4} = -\frac{4}{4+x^2} + \frac{3}{4} = \frac{-4+3x^2}{4(4+x^2)}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 3x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x > 0 \end{cases}$$



$$m \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \arcsin\left(\frac{4 - \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}}\right) + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La funzione è sempre strettamente positiva e non si annulla mai.

$$y'' = D\left(-\frac{4}{4+x^2} + \frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \frac{2x}{(4+x^2)^2} \quad y'' > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4 + 3x^2}{4(4+x^2)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow f'_+(0) = -\frac{1}{4}$$

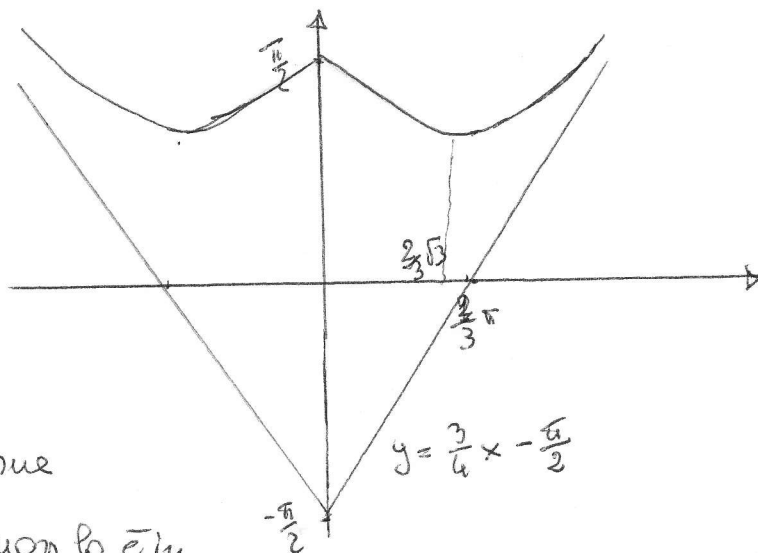
Poiché f è pari, segue che $f'_-(0) = \frac{1}{4}$ e quindi $x=0$ pto angolare.

f non è iniettiva
perché è pari

f non è surgettiva
perché $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$

f è continua in quanto
composta da funzioni continue

f non è derivabile perché non lo è in
 $x=0$ dove c'è un pto angolare.



$$3. \begin{cases} \frac{2^{3x} - 2^{2x+1} - 2^{x+3}}{\log_3 2|x| + \log_3 3|x| + \log_3 4|x| - 1} \geq 0 \\ |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

$$N \geq 0 \quad \text{Poniamo } 2^x = t$$

$$t^3 - 2t^2 - 8t \geq 0$$

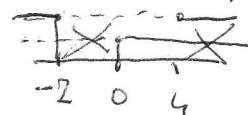
$$t(t^2 - 2t - 8) \geq 0 \quad t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$t \geq 0 \quad t \leq -2 \vee t \geq 4$$

$$-2 \leq 2^x \leq 0 \vee 2^x \geq 4$$

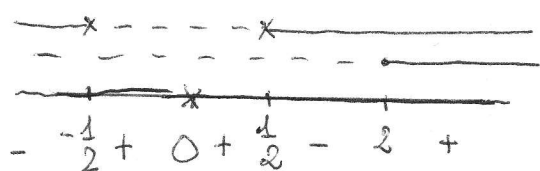
$\emptyset$

$$x \geq 2$$



$$D > 0 \quad \log_3(24|x|^3) > 1 \Leftrightarrow 24|x|^3 > 3 \Leftrightarrow |x|^3 > \frac{1}{8} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$$

(3)



$$ID =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]2, +\infty)$$

$$4. i) \int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} dx =$$

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x(1-x)} = x \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$\text{Ponendo } t = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow t^2 = \frac{1-x}{x}$$

$$xt^2 = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1+t^2} + 1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= -2 \int \frac{t(t^2+2)}{(t-t^3)(t^2+1)^2} dt = -2 \int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{D}{t^2+1} \right) dt \quad \begin{array}{l} \text{dopo aver} \\ \text{calcolato le} \\ \text{costanti, si ha} \end{array}$$

$$= -2 \left(\int \frac{A}{1-t} dt + \frac{B}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + C \int \frac{1}{t^2+1} dt + \frac{Dt+E}{t^2+1} \right) =$$

$$= +2A \lg |1-t| + B \lg(t^2+1) - 2C \operatorname{arctg} t - 2 \frac{Dt+E}{t^2+1} + \text{cost}$$

$$= 2A \lg \left| 1 - \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right| - B \lg \left(\frac{1-x}{x} + 1 \right) - 2C \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} - 2 \frac{D \sqrt{\frac{1-x}{x}} + E}{\frac{1-x}{x} + 1} + \text{cost}$$

$$ii) ID(R): \begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x-x^2}+x-1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-x^2} \neq 1-x \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x-x^2 \neq 1+x^2-2x \\ 2x^2-3x+1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 \neq \frac{1}{2} \\ x_2 \neq \frac{1}{2} \end{array}$$

$$ID = [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[.$$

Studio prima integrabilità in $[0, \frac{1}{2}[$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} |h(x)| = +\infty$ studio ordine di infinito di $h(x)$ o equivalentemente ordine di infinitesimo del denominatore. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{x-x^2}+x-1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}} + 1} = 1, \quad h \text{ è un infinito di ordine } 1 \text{ per } x \rightarrow \frac{1}{2}$$

Segue che h non è integrabile in $[0, \frac{1}{2}[$ e quindi neppure in $[0, 1[$.

Inoltre non è integrabile in $]2, +\infty)$ non essendo definita.

(4)

Poiché $\ln(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ segue

$$\ln(e^{-x^2} + \sin x + \cos x - 1) = \ln(1 + e^{-x^2} - 1 + \sin x + \cos x - 1) \\ \sim e^{-x^2} - 1 + \sin x + \cos x - 1 \sim x$$

mentre $1 - e^x \sim -x$ e quindi la funzione è un infinitesimo di ordine maggiore di 1.

Poiché $\ln(1+x) \sim x + \frac{x^2}{2}$

$$\ln(e^{-x^2} + \sin x + \cos x - 1) \sim e^{-x^2} - 1 + \sin x + \cos x - 1 + \frac{1}{2}(e^{-x^2} - 1 + \sin x + \cos x - 1)^2 \\ \sim x - \frac{x^2}{2}$$

mentre $1 - e^x \sim -x - \frac{x^2}{2}$

e quindi

$$\ln(e^{-x^2} + \sin x + \cos x - 1) + 1 - e^x \sim \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} = -x^2$$

Dunque l'ordine è 2 e la parte principale è $-x^2$.