

# Corso di laurea triennale in Chimica

## Esame di

### Istituzioni di Matematiche I

16 Luglio 2015

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$i \bar{z}^2 - z^2 = i + \left( \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \right)^{54}.$$

2. Studiare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_2^2 x^2 + 4} - \sqrt{4^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}+2} - 5}.$$

3. Data la funzione

$$g(x) = \ln(x^2 + x - 2)$$

- i) dire se è integrabile in  $[0, 1]$ ,  $]1, 2]$ ,  $[2, 3]$  e in  $[2, +\infty)$ .  
ii) calcolare poi gli integrali che hanno senso nei suddetti intervalli.

4. Studiare la funzione

$$h(x) = \sqrt[3]{\frac{|x \ln |x||}{x}}.$$

e disegnarne il grafico qualitativo.

## Svolgimento

1. Posto  $z = x + iy$ , poiché

$$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 + i^2 y^2 - 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi$$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2 y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \right)^{54} &= \left( \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right)^{54} = \cos \frac{54}{12} \pi - i \sin \frac{54}{12} \pi \\ &= \cos \left( 4\pi + \frac{\pi}{2} \right) - i \sin \left( 4\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = 0 - i = -i \end{aligned}$$

l'equazione diventa

$$i(x^2 - y^2 + 2xyi) - (x^2 - y^2 + 2xyi) = i - i \Leftrightarrow i(x^2 - y^2) + 2xy - x^2 + y^2 - 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2xy = 0 & \text{equazioni} \\ x^2 - y^2 - 2xy = 0 & \text{coincidenti} \end{cases} \quad \begin{aligned} &x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ &\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} - 1 = 0 \quad \vee \quad y = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{y} = 1 \pm \sqrt{2} \quad \vee \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (1 \pm \sqrt{2})y$$

L'equazione ha  $\infty$  soluzioni del tipo  $z = (1 \pm \sqrt{2} + i)y$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

$$2. \begin{cases} \lg_2 x^2 + 4 \geq 0 \\ 4^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x} + 2} - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{la 1ª eq. è verificata } \forall x \text{ s.t. } x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \\ \text{(somma di quadrati)} \\ (2^{\frac{1}{x}})^2 - 4 \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Posto } 2^{\frac{1}{x}} = t \quad t^2 - 4t - 5 \geq 0 \quad t_{1,2} = 2 \pm 3 = \begin{matrix} -3 \\ 5 \end{matrix}$$

$$2^{\frac{1}{x}} \leq -3 \quad \vee \quad 2^{\frac{1}{x}} \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq \lg_2 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - (\lg_2 5)x}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{\lg_2 5} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{C.E.} = ]0, \frac{1}{\lg_2 5}]$$

3.i) La funzione è definita e continua  $\forall x \in \mathbb{R}$  s.t.  $x^2 + x - 2 > 0$   
 $\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]1, +\infty)$ .

In  $[0, 1]$  non è integrabile perché non è definita.

In  $[1, 2]$  è integrabile in senso improprio perché continua e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lg(x^2 + x - 2) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \lg y = -\infty \quad \text{con ordine comunque lento (si tratta di un logaritmo) e quindi } \leq x < 1.$$

In  $[2, 3]$  è integrabile in senso classico perché continua in un intervallo chiuso e limitato;

In  $[2, +\infty)$  non è integrabile in senso improprio perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg(x^2 + x - 2) = +\infty \quad \text{Segue da } \int_2^{+\infty} \ln(x^2 + x - 2) dx = +\infty.$$

ii) Prima di tutto calcolo  $\int \ln(x^2 + x - 2) dx = x \ln(x^2 + x - 2) - \int \frac{x(2x+1) dx}{x^2 + x - 2}$  per parti

$$\text{Poiché } \frac{2x^2 + x}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{x^2 + x - 2}{2} \quad // \quad -x + 4$$

$$\int \frac{2x^2 + x}{x^2 + x - 2} dx = \int \left( 2 + \frac{x-4}{x^2 + x - 2} \right) dx = 2x - \int \left( \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \right) dx$$

dove  $A$  e  $B$  sono tali da  $A(x-1) + B(x+2) = x-4$

Per  $x = 1$ :  $3B = -3 \Rightarrow B = -1$

per  $x = -2$ :  $-3A = -6 \Rightarrow A = 2$  Segue da

$$\int \ln(x^2 + x - 2) dx = x \ln(x^2 + x - 2) - 2x + 2 \ln|x+2| - \ln|x-1| + C.$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x^2 + x - 2) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \ln(x^2 + x - 2) dx = 2 \ln 4 - 4 + 2 \ln 4 - \ln 1 + \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ (1+\varepsilon) \ln((1+\varepsilon)^2 + 1 + \varepsilon - 2) - 2 - 2\varepsilon + 2 \ln(3+\varepsilon) - \ln \varepsilon \right] \\ &= -4 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \ln\left(\frac{\varepsilon^2 + 3\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \ln(\varepsilon^2 + 3\varepsilon) - 2 - 2\varepsilon + 2 \ln(3+\varepsilon) \right] \\ &= -4 - \ln 3 + 2 + 2 \ln 3 = \ln 3 - 2. \end{aligned}$$

$$\int_2^3 \ln(x^2+x-2) dx = \left[ x \ln(x^2+x-2) - 2x + 2 \ln|x+2| - \ln|x-1| \right]_2^3$$

$$= 3 \ln 10 - 6 + 2 \ln 5 - \ln 2 - 2 \ln 4 + 4 - 2 \ln 4 + \ln 1$$

$$= 3 \ln 10 + 2 \ln 5 - 9 \ln 2 - 2.$$

4.  $y = \sqrt[3]{\frac{|x \ln|x||}{x}}$  ID:  $\begin{cases} |x| > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$

$h$  è dispari poiché  $h(-x) = \sqrt[3]{\frac{|-x \ln|-x||}{-x}} = - \sqrt[3]{\frac{|x \ln|x||}{x}} = -h(x)$

Basta studiare  $h$  per  $x > 0$  e poi ribaltare il grafico rispetto all'origine.

Per  $x > 0$ :  $h(x) = \sqrt[3]{\frac{|x| |\ln|x||}{x}} = \sqrt[3]{\frac{x |\ln x|}{x}} = \sqrt[3]{|\ln x|}$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow |\ln x| > 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, x \neq 1$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow |\ln x| = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (per  $x > 0$ )

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{|\ln x|} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{y} = +\infty$   $x = 0$  A. V.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{|\ln x|} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{y} = +\infty$   $\nexists$  A. orizz.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{|\ln x|}}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$  (per gli ordini)  $\nexists$  A. obliqua

$h'(x) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\ln^2 x}} \cdot \frac{\ln x}{|\ln x|} \cdot \frac{1}{x} \quad \forall x > 0, x \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3x \sqrt[3]{\ln^2 x}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{3x \sqrt[3]{\ln^2 x}} = -\infty$

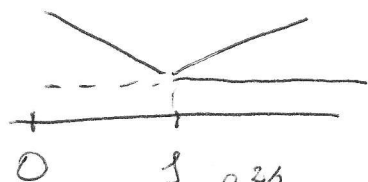
$\Rightarrow x = 1$  pto cuspidale

$h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x \sqrt[3]{\ln^2 x}} & \text{se } \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ -\frac{1}{3x \sqrt[3]{\ln^2 x}} & \text{se } \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{cases}$

Segue da

(4)

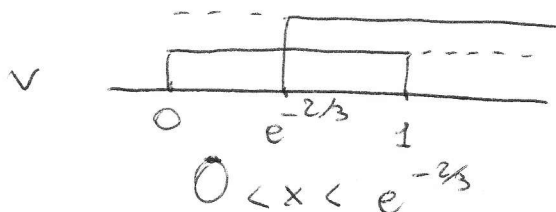
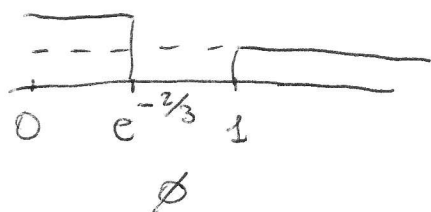
$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{3x^3 \sqrt[3]{\ln^2 x}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{3x^3 \sqrt[3]{\ln^2 x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \forall x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$



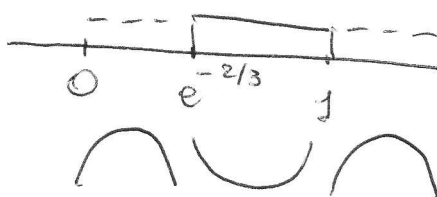
$x = 1$  pto di minimo cuspidale

$$h''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{\ln^{2/3} x + x \cdot \frac{2}{3} (\ln x)^{-1/3} \cdot \frac{1}{x}}{(x \ln^{2/3} x)^2} = -\frac{1}{3} \frac{\ln^{2/3} x + \frac{2}{3 \sqrt[3]{\ln x}}}{x^2 \ln^{4/3} x} = \frac{3 \ln x + 2}{3x^2 \ln^{5/3} x} & \text{per } x > 1 \\ + \frac{3 \ln x + 2}{3x^2 \ln^{5/3} x} & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$h''(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3 \ln x + 2 < 0 \\ \ln x < -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ +(3 \ln x + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < e^{-2/3} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > e^{-2/3} \end{cases}$$



$$y'' > 0 \Leftrightarrow e^{-2/3} < x < 1$$



$x = e^{-2/3}$  pto di flesso

$x = 1$  pto di flesso cuspidale

