

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di

Istituzioni di Matematiche I

1 Luglio 2015

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^3 = 1 + 2i - \left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \right)^{57}.$$

2. Studiare la disequazione

$$x\sqrt{x^2 - 4} > x^2 - 5$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \exp \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x}} \right)$$

dire se è integrabile in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x - \sin x + \cos 2x}{1 + 2 \sin x \cos x} dx.$$

5. Studiare la funzione

$$g(x) = (x^2)^{\frac{|x-1|}{2x \ln|x|}}$$

e disegnarne il grafico qualitativo.

Svolgimento

1. Poiché

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \right)^{57} = \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \right)^{57} = \cos \left(-\frac{57}{6} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{57}{6} \pi \right)$$

$$= \cos \left(9\pi + \frac{3}{6} \pi \right) - i \sin \left(9\pi + \frac{3}{6} \pi \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) - i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = i$$

L'equazione diventa $z^3 = 1 + 2i - i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

e cioè $z = \left\{ \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$

L'equazione ha dunque tre soluzioni date da

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{8}{12} \pi + i \sin \frac{8}{12} \pi \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17}{12} \pi + i \sin \frac{17}{12} \pi \right).$$

$$2. \quad x \sqrt{x^2 - 4} > x^2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x^2(x^2 - 4)} > x^2 - 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -\sqrt{x^2(x^2 - 4)} > x^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(x^2 - 4) \geq 0 \\ x^2 - 5 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5 \geq 0 \\ x^2(x^2 - 4) \geq (x^2 - 5)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2(x^2 - 4) \geq 0 \\ -x^2 + 5 \geq 0 \\ x^2(x^2 - 4) < (-x^2 + 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 4 \vee x=0 \\ x^2 < 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 5 \\ x^4 - 4x^2 > x^4 - 10x^2 + 25 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 \leq 5 \\ x^4 - 4x^2 < x^4 - 10x^2 + 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4 \leq x^2 < 5 \vee x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 5 \\ x^2 > \frac{25}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 \geq 4 \\ x^2 \leq 5 \\ x^2 < \frac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 \leq x^2 < 5 \vee x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 4 \leq x^2 < \frac{25}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 4 \vee x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 4 \leq x^2 < \frac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 \vee -\sqrt{\frac{25}{6}} < x \leq -2 \vee x=0$$

$$3. \text{ID}(f): \begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x} \neq \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 + 2x \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0, -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{ID}(f) =]0, +\infty)$$

f è continua in $]0, 1]$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x}}} \xrightarrow{\text{trascuro infinitesimi più grande}} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{x}}} = e^{+\infty} = +\infty$

con ordine comunque grande $\Rightarrow f$ non è integ. in s.l. in $]0, 1]$.

f è continua in $[1, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow f$ non è integ. in s.i. in $[1, +\infty)$. trascuro gli infiniti più lenti

$$4. \int \frac{\cos x - \sin x + \cos 2x}{1 + 2 \sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} dx + \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$= \int \frac{D(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{D(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} dx$$

$$= -\frac{1}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{2} \lg(1 + \sin 2x) + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x + \cos x} + \lg \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x + \cos x} + \lg |\sin x + \cos x| + c$$

5. Poiché

$$(x^2)^{\frac{1}{2x \ln |x|}} = e^{\frac{1}{2x \ln |x|} \ln x^2} = e^{\frac{1}{2x \ln |x|} \cdot 2 \ln |x|} = e^{\frac{1}{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

basta studiare la funzione

$$\begin{cases} \ln |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \\ |x| \neq 0 \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{ \pm 1, 0 \}$$

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{I} \Delta$$

$$g(x) = 0 \quad x \in \emptyset$$

g non è né pari né dispari

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = e^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow g \text{ è prolungabile per continuità in } x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty \quad x = 0 \quad \text{A. verticale solo a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{|x-1|}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = e \quad y = e \quad \text{As. orizz. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{|x-1|}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{e} \quad y = e^{-1} \quad \text{As. orizz. a } -\infty$$

$$y' = e^{\frac{|x-1|}{x}} \cdot \frac{\frac{x-1}{|x-1|} x - |x-1|}{x^2} = e^{\frac{|x-1|}{x}} \cdot \frac{(x-1)x - (x-1)^2}{x^2|x-1|} = e^{\frac{|x-1|}{x}} \cdot \frac{(x-1)}{x^2|x-1|} \quad \forall x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = 1$$

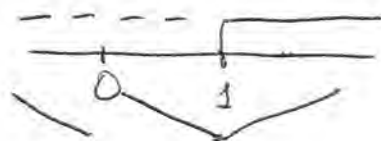
$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ pto angolare per la funzione prolungata nel pto 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{x-1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

per $x \rightarrow 0^-$ la funzione tende a 0
con grafico tangente all'asse x

$$y' > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad x \neq 0$$

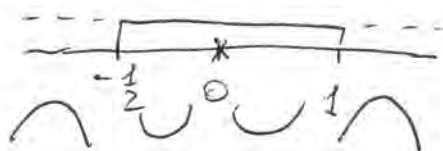


$x = 1$ pto di minimo relativo per il prolungamento di g .

$$y'' = \begin{cases} D(e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}) = e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} + e^{\frac{x-1}{x}} \left(-\frac{2}{x^3}\right) = e^{\frac{x-1}{x}} \frac{1-2x}{x^4} & \text{se } x > 1 \\ D(e^{-\frac{x-1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)) = e^{-\frac{x-1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + e^{-\frac{x-1}{x}} \left(\frac{2}{x^3}\right) = e^{-\frac{x-1}{x}} \frac{1+2x}{x^4} & \text{se } x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1, x \neq 0 \\ 1+2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1, x \neq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0 \vee 0 < x < 1$$



f convessa in $]-\frac{1}{2}, 0[$ e in $]0, 1[$
 concava in $(-\infty, -\frac{1}{2}[$ e in $]1, +\infty)$
 $x = -\frac{1}{2}$ pto di flesso

