

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

16 giugno 2015

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$|z|^4 z = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \left(\frac{|x \ln |x||}{x} \right)$$

e disegnarne il grafico qualitativo. Dire poi, giustificando la risposta, se f è iniettiva, surgettiva, continua, derivabile.

3. Trovare il dominio della funzione

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(e^{\sqrt{x^2-x}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{-|x|} \right).$$

4. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \arctan \frac{1}{x},$$

i) calcolare l'integrale generale;

ii) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in $]0, \frac{1}{2}]$, in $]1, 3]$, in $[3, +\infty)$.

5. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ e ricordando che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ si ha

$$|z|^4 z = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \Leftrightarrow |z|^4 z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \underset{z \neq 0}{|z|^4 z^2 = 1} \Leftrightarrow \underset{z \neq 0}{\rho^6 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) = 1} \Leftrightarrow$$

$$\rho^6 = 1 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 2\vartheta = 2k\pi \Leftrightarrow \rho = 1 \wedge \vartheta = k\pi \Leftrightarrow \rho = 1 \wedge \vartheta = 0, \pi$$

$\rho \neq 0$

L'equazione ha solo le soluzioni $z = \pm 1$.

2. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{|x \lg x|}{x}\right)$ $\text{ID} = \mathbb{R}^*$

$f(x) = -f(x) \quad \forall x \neq 0$ cioè f è dispari e posso studiarla per $x > 0$ e poi ribaltarne il grafico rispetto all'origine

Per $x > 0$: $\frac{|x \lg x|}{x} = \frac{|x| |\lg x|}{x} = \frac{x |\lg x|}{x}$

basta dunque studiare

$f(x) = \operatorname{arctg} |\lg x|$ per $x > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |\lg x| = 0 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$(1, 0)$ Intersezione con asse x

$f(x) > 0 \Leftrightarrow |\lg x| > 0 \Leftrightarrow \lg x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$f(x) > 0 \quad \forall x > 0, x \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg}(|\lg x|) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y = |\lg x|}} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$

As. Verticale per $x \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(|\lg x|) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y = |\lg x|}} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$

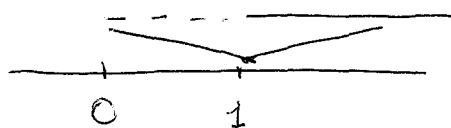
$y = \frac{\pi}{2}$

A. orizz. a $+\infty$

$y' = \frac{1}{1 + |\lg x|^2} \left(\frac{\lg x}{|\lg x|} \cdot \frac{1}{x} \right)$

$\forall x > 0, \lg x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$



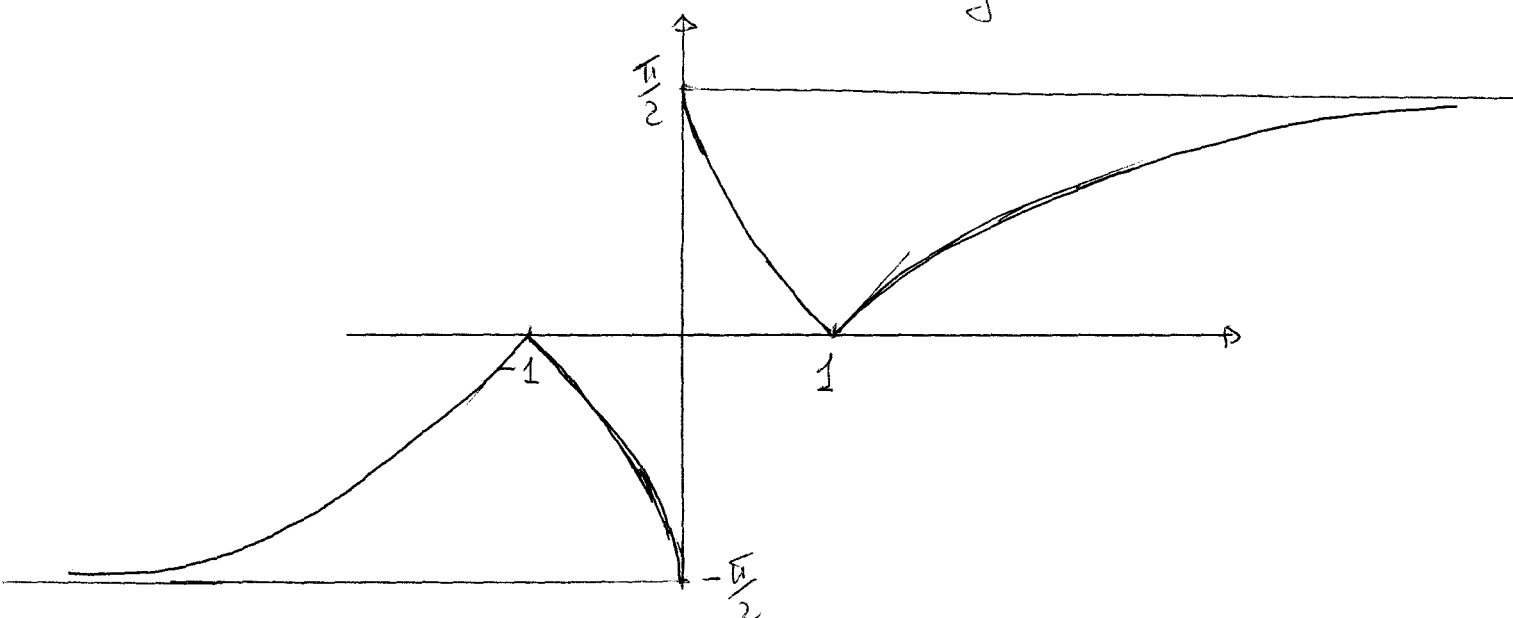
f strettamente crescente in $[1, +\infty)$
strettamente decrescente in $]0, 1]$

$x = 1$ min. rel. proprio

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1}{1 + \lg^2 x} \left(\pm \frac{1}{x} \right) = \pm 1$

$x = 1$ pto angoloso poiché $f'_-(1) = -1, f'_+(1) = +1$.

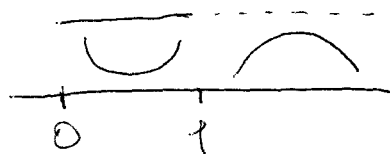
Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \lg^2 x} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty$, cioè il grafico di f per $x \rightarrow 0^+$ si avvicina al pb $(0, \frac{\pi}{2})$ con tangente verticale



Perché $y' = \begin{cases} \frac{1}{(1 + \lg^2 x)x} & x > 1 \\ -\frac{1}{(1 + \lg^2 x)x} & 0 < x < 1 \end{cases}$ segue da per $x > 1$ si ha:

$$y'' = -\frac{1 + \lg^2 x + 2 \lg x \cdot \frac{1}{x} \cdot x}{(1 + \lg^2 x)^2 x^2} = -\frac{(\lg x + 1)^2}{x^2 (1 + \lg^2 x)^2} \quad \text{e quindi}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{(\lg x + 1)^2}{x^2 (1 + \lg^2 x)^2} > 0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{(\lg x + 1)^2}{x^2 (1 + \lg^2 x)^2} > 0 \Leftrightarrow \lg x \neq -1 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ 0 < x < 1 \wedge x \neq \frac{1}{e} \end{cases}$$



f convessa in $[0, 1]$

f concava in $[1, +\infty)$

Dal grafico si vede che f non è iniettiva né surgettiva, ma è continua (il suo grafico si spezza solo per $x = 0$ dove non è definita) e non è derivabile poiché ai suoi due pt angolari $(\pm 1, 0)$.

(3)

$$3. \quad e^{\sqrt{x^2-x}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-|x|} \Leftrightarrow e^{\sqrt{x^2-x}} > 3^{|x|} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} > \lg 3^{|x|} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2-x} > |x| \lg 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x \geq 0 \\ |x| \lg 3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |x| \lg 3 \geq 0 \\ x^2-x > x^2 \lg^2 3 \end{cases} \Leftrightarrow (-1 + \lg^2 3)x^2 + x < 0$$

$\cancel{\neq}$ (essendo $\lg 3 \approx 0,477 > 0$)

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\lg^2 3 - 1} < x < 0 \quad (\text{essendo } \lg^2 3 - 1 \approx 0,2)$$

Conclusione: $ID(f) =]-\frac{1}{\lg^2 3 - 1}, 0[.$

$$\begin{aligned} 4.i) \int \frac{1}{(1-x)^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \int \left(D \frac{1}{1-x}\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{1-x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \int \frac{1}{1-x} D \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{1-x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \int \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \\ &= \frac{1}{1-x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \int \frac{1}{(1-x)(x^2+1)} dx. \end{aligned}$$

Poi da

$$\frac{1}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A-B)x^2 + (B+C)x + A+C}{(1-x)(x^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A-B=0 \\ B-C=0 \\ A+C=+1 \end{cases} \Rightarrow A=B=C=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \lg|1-x| + \frac{1}{4} \lg(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$$

si conclude che

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{1-x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \lg|1-x| + \frac{1}{4} \lg(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

ii) la funzione è definita e continua in $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Poi da

Cum $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-x)^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x)$ è integrabile in senso classico (e quindi in senso improprio) in $]0, 1[$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1-x)^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = (\operatorname{arctg} 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty \quad \text{con ord } 2 > 1 \Rightarrow$$

f non è integ. in s.i. in $]1, 3]$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{con ordine } 3 > 1 \quad \left(\text{poiché } \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$\Rightarrow f$ è integ. in s.i. in $[3, +\infty)$.

5.
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{\operatorname{sen} x \sqrt{1+x^2} - x}{x \operatorname{sen} x} \right) = \quad \text{poiché } \operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^4) \right) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3} + o(x^4) + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^6) - \cancel{x}}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$