

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di

Istituzioni di Matematiche I

8 Aprile 2015

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$(z^2)^4 = 16(\bar{z})^4.$$

2. Studiare la disequazione

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\arcsin \frac{x+4}{x-4} - \frac{\pi}{6}} + 1}}{\log_2(1 - x - \sqrt{x^2 - 4})} \geq 0$$

3. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{\sqrt{x^2+1}} - 3^{-x}}{3^{-x+1} - 1}$$

4. Data la funzione

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} dx.$$

i) calcolare l'integrale generale;

ii) dire se è integrabile in senso improprio negli intervalli $[0, \frac{1}{2}[$, $[\frac{2}{3}, 1[$ e $[1, +\infty)$.

5. Studiare la funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

e disegnarne il grafico qualitativo.

Svolgimento

1. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ si ha $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

e quindi $z^8 = \rho^8(\cos 8\theta + i \sin 8\theta)$, $(\bar{z})^4 = \rho^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$.

Sostituendo nell'equazione:

$$\rho^8(\cos 8\theta + i \sin 8\theta) = 16 \rho^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho^8 = 16 \rho^4 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 8\theta = 4\theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho^4 = 16 \\ \theta = \frac{2k\pi}{12} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = 2 \\ \theta = k\frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\rho = 0 \Rightarrow \bar{z}_0 = 0$

$\rho = 2, k=0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2$

$k=1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}$

$z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i$

$k=2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}$

$z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \sqrt{3}i$

$k=3 \Rightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{2}$

$z_3 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2i$

$k=4 \Rightarrow \theta_4 = \frac{2}{3}\pi$

$z_4 = 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = 2(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$

$k=5 \Rightarrow \theta_5 = \frac{5}{6}\pi$

$z_5 = 2(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$

$k=6 \Rightarrow \theta_6 = \pi$

$z_6 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$

$k=7 \Rightarrow \theta_7 = \frac{7}{6}\pi$

$z_7 = 2(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi) = -\sqrt{3} - i$

$k=8 \Rightarrow \theta_8 = \frac{4}{3}\pi$

$z_8 = 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = -1 - \sqrt{3}i$

$k=9 \Rightarrow \theta_9 = \frac{3}{2}\pi$

$z_9 = 2(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi) = -2i$

$k=10 \Rightarrow \theta_{10} = \frac{5}{3}\pi$

$z_{10} = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi) = 1 + \sqrt{3}i$

$k=11 \Rightarrow \theta_{11} = \frac{11}{6}\pi$

$z_{11} = 2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi) = \sqrt{3} - i$

L'equazione ha 13 soluzioni date da

$$\{0, \pm(\sqrt{3} + i), \pm(1 + \sqrt{3}i), \pm(-1 + \sqrt{3}i), \pm(1 - \sqrt{3}i), \pm 2i, \pm 2i\}$$

2. Prima di tutto studio il dominio della funzione

$$\begin{cases} \sqrt{\arcsin \frac{x+4}{x-4} - \frac{\pi}{6}} + 1 \geq 0 \\ 1 - x - \sqrt{x^2 - 4} > 0 \\ \log_2(1 - x - \sqrt{x^2 - 4}) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin \frac{x+4}{x-4} \geq \frac{\pi}{6} \\ 1 - x - |x| - 4 > 0 \\ 1 - x - |x| - 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{x+4}{x-4} \leq 1 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - 2x - 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ 1 - x + x - 4 > 0 \end{cases} \\ 1 - x - |x| - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{x+4}{x-4} \leq 1 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -3 > 0 \end{cases} \\ x + |x| \neq -4 \end{cases} \quad \emptyset$$

Poiché la 2^a diseq. del sistema non è mai verificata, il dominio è uguale a $\emptyset$ e quindi la frazione, non essendo mai definita, non è mai parificata.

4. i) Poiché $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x^2 \frac{1-x}{x}} = x \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow$ si pone $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{x} = t^2 \quad 1-x = t^2 x \quad x(1+t^2) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1+t^2}$$

Sostituendo si ha

$$\int \frac{\frac{1}{1+t^2} + 1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt = -2 \int \frac{(t^2+2)t}{(t-t^2)(1+t^2)^2} dt = +2 \int \frac{t^2+2}{(t-1)(1+t^2)^2} dt$$

Applico formula di Hermite:

$$\begin{aligned} \frac{t^2+2}{(t-1)(t^2+1)^2} &= \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{d}{dt} \frac{Et+F}{t^2+1} \\ &= \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{-Et^2-2Ft+E}{(t^2+1)^2} = \dots \end{aligned}$$

Facendo tutti i conti si può determinare il valore delle costanti.

Per brevità ometto i calcoli e lascio le costanti indicate.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} dx = A \lg|t-1| + \frac{B}{2} \lg(t^2+1) + C \operatorname{arctg} t + \frac{Et+F}{t^2+1} + \cos t$$

$$= A \lg \left| \sqrt{\frac{1-x}{x}} - 1 \right| + \frac{B}{2} \lg \left(\frac{1-x}{x} + 1 \right) + C \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \frac{E\sqrt{\frac{1-x}{x}} + F}{\frac{1-x}{x} + 1} + \cos t$$

ii) la funzione integranda è definita per x r.c.

$$\begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x-x^2}+x-1 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-x^2} \neq 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x-x^2 \neq 1+x^2-2x \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+1 \neq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Perché $ID = [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3}, 1[$

non ha senso calcolare l'integrale in $[1, +\infty)$ dove la funzione non è definita.

Perché f è cont. in $[0, \frac{1}{2}[$ ma

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} = -\infty$ con ordine 1 essendo

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} \cdot (x-\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+1} = 1$, f non è integ. in a.i. in $[0, \frac{1}{2}[$

Perché f è continua in $[\frac{2}{3}, 1[$ e

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}+x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x} + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} = +\infty$ con ord $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

trascuri infinitesimi più sotto f è integ. in a.i. in $[\frac{2}{3}, 1[$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} (3^{\sqrt{x^2+1}+x} - 1)}{3 \cdot 3^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x} \cdot (\sqrt{x^2+1}+x) \lg 3}{3^{-x} (3 - 3^x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1}+x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

e $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3^y - 1}{y} = (\lg 3) y$

$$5. \quad y = x e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$ID = \mathbb{R} - \{1\}$$

f non è né pari né dispari

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x e^{\frac{x+1}{x-1}} = 1 \cdot e^{\frac{2}{0^-}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x e^{\frac{x+1}{x-1}} = 1 \cdot e^{\frac{2}{0^+}} = +\infty \quad x=1 \text{ A.V. solo per } x \rightarrow 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{x+1}{x-1}} = \pm\infty \quad \text{A2. 02422}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{x+1}{x-1}}}{x} = e; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{x+1}{x-1}} - ex = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x (e^{\frac{x+1}{x-1}} - e)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x (e^{1 + \frac{2}{x-1}} - e) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ex (e^{\frac{2}{x-1}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e \frac{2x}{x-1} = 2e$$

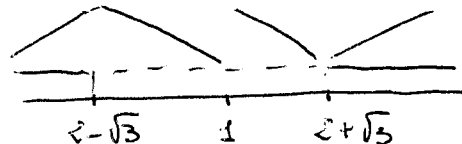
$$e^{\frac{2}{x-1}} - 1 \sim \frac{2}{x-1}$$

$$y = ex + 2e \quad \text{A2. obl. a } \pm\infty$$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} + x e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(1 - \frac{2x}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x^2-4x+1)}{(x-1)^2} \quad \forall x \neq 1$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+1}{(x-1)^2} > 0$$

$$x < 2-\sqrt{3} \vee x > 2+\sqrt{3} \quad x \neq 1$$



$$M \begin{cases} x = 2-\sqrt{3} \\ y = f(2-\sqrt{3}) \end{cases}$$

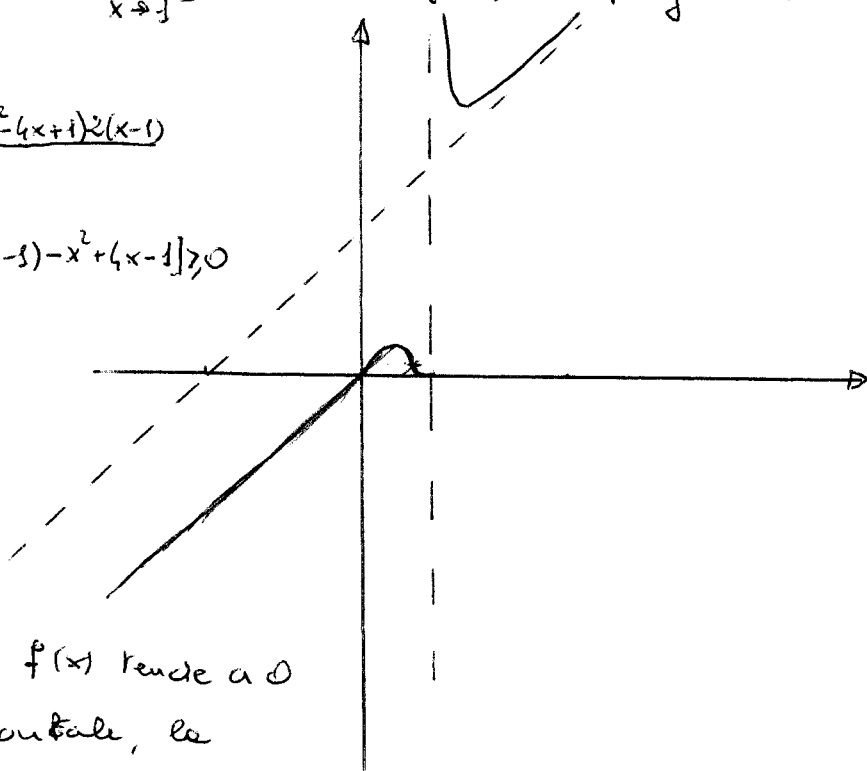
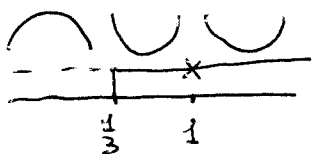
$$m \begin{cases} x = 2+\sqrt{3} \\ y = f(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0 \cdot (-\infty) = 0 \text{ per gli ordini}$$

$$y'' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2(x^2-4x+1)}{(x-1)^4} + e^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{(2x-4)(x-1)^2 - (x^2-4x+1)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow -2(x^2-4x+1) + 2(x-1)[(x-2)(x-1) - x^2 + 4x - 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \quad x \neq 1$$



Come già prevedibile dal fatto che $f(x)$ tende a 0

per $x \rightarrow 1^-$ con tangente orizzontale, la

la funzione ha un pb di flesso ma il pb di massimo relativo è $x=1-$