

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

18 Febbraio 2015

1. Risolvere la seguente equazione

$$|z| = z^2 + 3\operatorname{Re}(z) + 2.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = 2(|x+1| - 2) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

e disegnarne il grafico qualitativo. Dire poi, giustificando la risposta, se f è iniettiva, surgettiva, continua, derivabile.

3. Trovare il dominio della funzione

$$g(x) = \log\left(\frac{\log_2|x-1| + \log_2(x+4) - 1}{\exp(x^2) - \exp x}\right).$$

4. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x(x-2)}},$$

- i) calcolare la primitiva che in $x = 3$ vale 0;
ii) dire se è integrabile in senso improprio in $[-1, 0[$, in $]0, 1]$, in $]2, 3]$, in $[3, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$ poiché $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ si ha

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a^2 - b^2 + 2abi + 3a + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = a^2 - b^2 + 3a + 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ \sqrt{b^2} = -b^2 + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ \sqrt{a^2} = a^2 + 3a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ |b| = -b^2 + 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ |a| = a^2 + 3a + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ |b|^2 + |b| - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a^2 + 2a + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a^2 + 4a + 2 = 0 \end{cases}$$

$$|b|_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \quad \Delta < 0 \quad \emptyset \quad a_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2} < \begin{matrix} -2 - \sqrt{2} < 0 \\ -2 + \sqrt{2} < 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a = -2 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

L'equazione ha 4 soluzioni

$$z_{1/2} = \pm i, \quad z_{3/4} = -2 \pm \sqrt{2}$$

2. ID = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

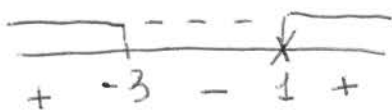
$$2(|x+1|-2)e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \Rightarrow |x+1| = 2$$

$$(0, -\frac{2}{e}) \quad (-3, 0)$$

$$\text{intersezioni } x+1 = \pm 2 \quad \begin{matrix} x = -3 \\ x = 1 \end{matrix}$$

N.A.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |x+1| > 2 \Leftrightarrow x+1 < -2 \vee x+1 > 2 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{2(|x+1|-2)}_0 \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \underbrace{2(|x+1|-2)}_0 \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{+\infty} = +\infty \quad \text{per gli asintoti}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \underbrace{2(|x+1|-2)}_{+\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{e^0 = 1} = +\infty \quad \text{As. orizzontali}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1-2)}{x} e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \quad (\text{eventuale coeff angolare dell'asintoto obliquo a} +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x+1-2)e^{\frac{1}{x-1}} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left[x(e^{\frac{1}{x-1}} - 1) - \frac{1}{x-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\underbrace{x \cdot \frac{1}{x-1}}_{\rightarrow 1} - \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\rightarrow 1} \right) = 0 \quad y = 2x \text{ As. ob. a} +\infty \quad e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \sim \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x-1-2)e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = -2 \quad (\text{eventuale coeff angolare dell'as. obliquo a } -\infty)$$

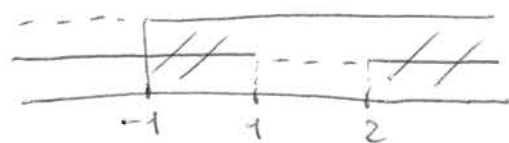
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(-x-3)e^{\frac{1}{x-2}} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x(e^{\frac{1}{x-2}} - 1) - 6e^{\frac{1}{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 \frac{x}{x-2} - 6e^{\frac{1}{x-2}} = -2 - 6 = -8 \quad y = -2x - 8 \quad \text{As. ob. a } -\infty \end{aligned}$$

$$y' = 2 \left(\frac{x+1}{|x+1|} e^{\frac{1}{x-1}} + (|x+1|-2) e^{\frac{1}{x-1}} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) \right)$$

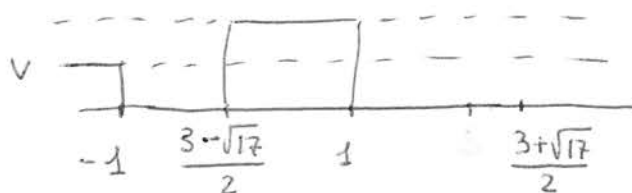
$$= \begin{cases} 2e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x-1}{(x-1)^2} \right) = 2e^{\frac{1}{x-1}} \frac{x-2}{x-1} & x > -1, x \neq 1 \\ 2e^{\frac{1}{x-1}} \left(-1 + \frac{x+3}{(x-1)^2} \right) = 2e^{\frac{1}{x-1}} \frac{-x^2+3x+2}{(x-1)^2} & x < -1 \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \frac{x-2}{x-1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ \frac{-x^2+3x+2}{(x-1)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 1 \vee x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

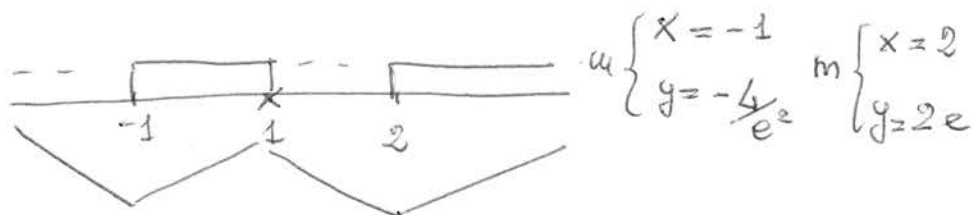
$$x^2 - 3x - 2 < 0 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$



$$-1 < x < 1 \vee x > 2$$


 $\emptyset$

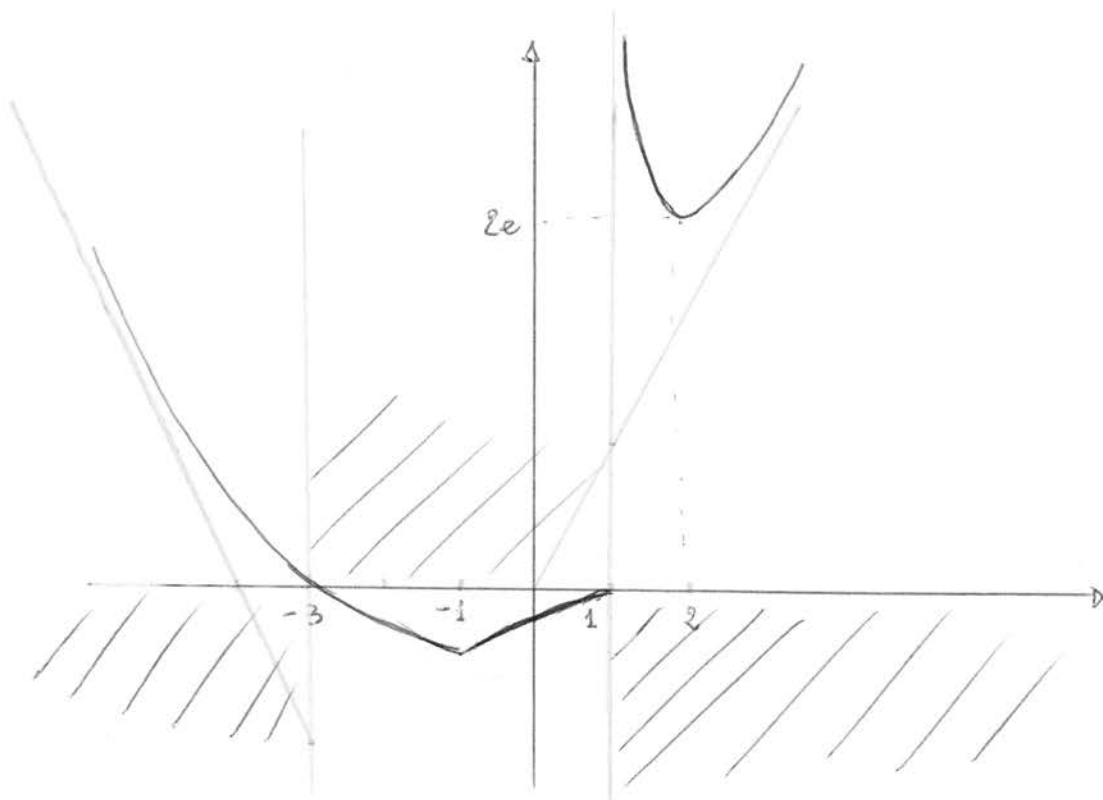
Conclusione: $y' > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \vee x > 2$



Vediamo se f è derivabile in $x = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} y' &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 2e^{\frac{1}{x-1}} \frac{-x^2+3x+2}{(x-1)^2} = \frac{2}{e^{\frac{1}{-2}}} \cdot \frac{-2}{4} = -\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} y' &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 2e^{\frac{1}{x-1}} \frac{x-2}{x-1} = 2e^{-\frac{1}{2}} \frac{-3}{-2} = \frac{3}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$x = -1$ pto angoloso



Non calcolo la derivata 2^a, per evitare conti lunghi! Osservo però che

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2e^{\frac{1}{x-1}} \frac{x-2}{x-1} = 2 \cdot e^{-\infty} \cdot \frac{-1}{0} = 0 \cdot \infty = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

segue che il grafico di f per $x \rightarrow 1^-$ è tangente all'asse x , quindi risolto verso il basso. Nel disegno f è convessa per $x < -1 \vee x > 1$.

f non è iniettiva perché esistono rette orizzontali che intersecano f_f in più di un punto; f non è surgettiva perché esistono rette orizzontali che non intersecano f_f ; f è continua perché prodotto e composta di funzioni continue; f non è derivabile perché per $x = -1$ c'è un punto angoloso.

$$3. \begin{cases} \frac{\lg_2 |x-1| + \lg_2 (x+4) - 1}{e^{x^2} - e^x} > 0 \\ |x-1| > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

$$N > 0 \quad \lg_2 |x-1|(x+4) > 1$$

$$D > 0 \quad e^{x^2} > e^x \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$$

$$x-1 \neq 0$$

$$x > -4$$

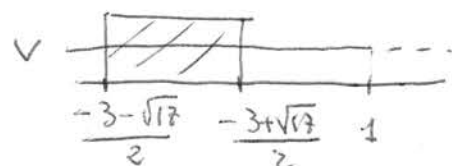
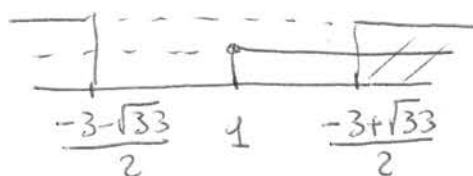
(4)

$$N > 0 \quad |x-1|(x+4) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x-1)(x+4) > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ -(x-1)(x+4) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 6 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 3x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < \frac{-3-\sqrt{33}}{2} \vee x > \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

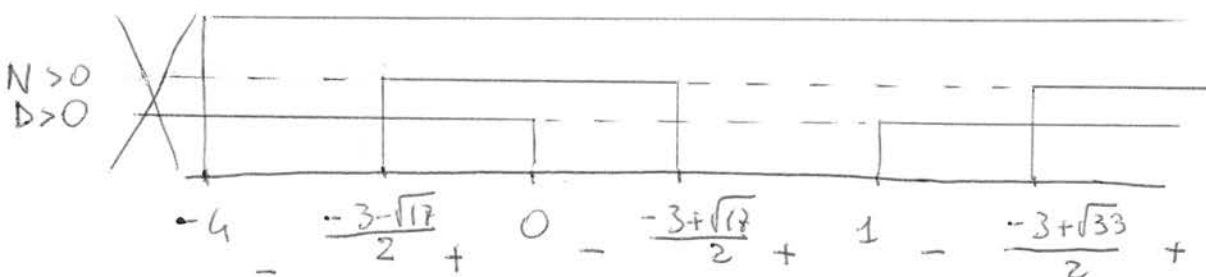
$$x_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \quad x_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ -\frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$



Dunque $N > 0$ $-\frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \vee x > \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

mentre $D > 0$ $x < 0 \vee x > 1$



La disuguaglianza è soddisfatta per $-\frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < 0 \vee \frac{-3+\sqrt{17}}{2} < x < 1 \vee x > \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$

4.ii) Poniamo $\sqrt{x^2-2x} = x+t \Leftrightarrow x^2-2x = x^2+t^2+2tx \Leftrightarrow x = -\frac{t^2}{2(1+t)}$

e quindi $dx = -\frac{1}{2} \frac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} dt$

Segue che $\sqrt{x^2-2x} = -\frac{t^2}{2(1+t)} + t = \frac{t^2+2t}{2(1+t)}$ e sostituendo nell'integrale

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{t^2+2t}{2(1+t)} \cdot \left(-\frac{t^2}{2(1+t)} - 2\right)} \cdot \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} dt = - \int \frac{2(1+t)}{-t^2-4t-4} \cdot \frac{1}{t+1} dt = 2 \int \frac{1}{(t+2)^2} dt$$

$$= -2 \frac{1}{t+2} + C = -\frac{2}{\sqrt{x^2-2x}-x} + C.$$

Imponendo che per $x=3$ valga 0 si ha

$$-\frac{2}{\sqrt{3}-3} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{2}{\sqrt{3}-3} \quad \text{e quindi la primitiva cercata è}$$

$$F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x^2-2x}-x} + \frac{2}{\sqrt{3}-3}.$$

ii) La funzione è definita e continua per $x^2-2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-2x}(x-2)} = -\infty \quad \text{con ord. } \frac{1}{2} < 1$$

Trascurso infinitesimo x^2 di ord. superiore a x
segue che h è integrabile in $[-1, 0[$ in senso improprio.

Poiché $]0, 1]$ è disgiunto dal dominio, non ha senso calcolare l'integrale (né in senso improprio né classico).

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x}(x-2)^{3/2}} = +\infty$$

con ord. $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow h$ non è integ. in a.i. in $]2, 3]$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot x} = 0 \quad \text{con ord. } 2 > 1$$

Trascurso infinito più lento.

h è integrabile in a.i. in $[2, +\infty)$.