

Corso di laurea triennale in Chimica

Esonero di Istituzioni di Matematiche I

Traccia A

7 Gennaio 2015

1. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione

$$z^4 - (-i - 1)^5 + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}} \right)^5 = i^{33}.$$

2. Dopo aver determinato il campo di esistenza D della funzione

$$f(x) = \left(|2x - \sqrt{x^2 + 1}| - 1 \right)^{-\sqrt{2}} + \left(2^{2x^2+1} - 4 \cdot 2^x \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

calcolare la chiusura di D , l'interno di D e la frontiera di D .

3. Studiare la disequazione

$$\log^2 x^2 - 2 \log \sqrt{|x|} \geq 2 \log |ex| - 1.$$

4. Data la funzione

$$g(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1} \right) \sin \frac{1}{x},$$

calcolarne il limite per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$ precisandone, ove ha senso, l'ordine di infinito e/o infinitesimo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \sqrt{2x + 1} - |\arcsin x|,$$

- i) dire, giustificando la risposta, se è derivabile nel suo dominio;
- ii) determinare estremi assoluti e scrivere il codominio di h ;
- iii) dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ l'equazione $h(x) = \alpha$ ammette soluzioni.

Svolgimento

1. Poiché

$$(-i-1)^5 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right]^5 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{25\pi}{4} + i \sin \frac{25\pi}{4} \right) =$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 6\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 6\pi \right) \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}} \right)^5 = \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10} \right) \right)^5 = \cos 8 \cdot \frac{\pi}{10} + i \sin 8 \cdot \frac{\pi}{10} = i,$$

$$i^{33} = i^{32} \cdot i = (i^4)^8 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

l'equazione diventa $z^4 - 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) + i = i \Leftrightarrow$

$$z = \sqrt[4]{4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \left\{ \sqrt[4]{4\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right) \right) \mid k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$$

Le soluzioni sono date dai numeri complessi

$$z_0 = \sqrt[4]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right) = -z_0, \quad z_3 = \sqrt[4]{4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right) = -z_1.$$

2. $\begin{cases} |2x - \sqrt{x^2+1}| - 1 > 0 \\ 2^{2x^2+1} - 4 \cdot 2^x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - \sqrt{x^2+1}| > 1 \\ 2^{2x^2+1} \geq 2^{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{x^2+1} < -1 \vee 2x - \sqrt{x^2+1} > 1 \\ 2x^2+1 \geq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 < \sqrt{x^2+1} \vee 2x-1 > \sqrt{x^2+1} \\ 2x^2-x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \frac{-1}{2}$$

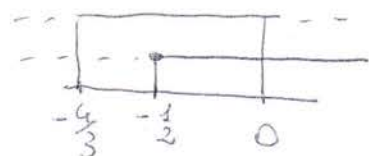
Poiché

$$2x+1 < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (2x+1)^2 < x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\forall x$$

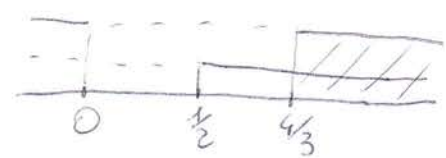
$$x < -\frac{1}{2} \vee \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2+4x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

$$-\frac{4}{3} < x < 0 \Leftrightarrow x < 0,$$



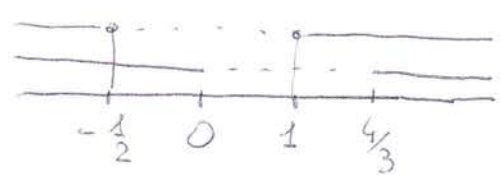
$$2x-1 > \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ (2x-1)^2 > x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \\ x > \frac{1}{2} \\ 3x^2-4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 0 \vee x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$$



il sistema diventa

$$\begin{cases} x < 0 \vee x > \frac{4}{3} \\ x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x > \frac{4}{3}$$



$$D = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$$

$$\bar{D} = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty) \quad \bar{D}^o = (-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{4}{3}, +\infty) \quad F_2(D) = \{-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\}$$

3. Poiché

$$\lg^2 x^2 = (\lg x^2)^2 = (2 \lg |x|)^2 = 4 \lg^2 |x|$$

$$2 \lg \sqrt{|x|} = 2 \cdot \frac{1}{2} \lg |x| = \lg |x|$$

$$2 \lg |e x| = 2 (\lg e + \lg |x|) = 2 + 2 \lg |x|$$

la disuguaglianza diventa

$$4 \lg^2 |x| - \lg |x| \geq 2 + 2 \lg |x| - 1$$

ovvero

$$4 \lg^2 |x| - 3 \lg |x| - 1 \geq 0 \quad \text{Ponendo } t = \lg |x|$$

$$4t^2 - 3t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -\frac{1}{4} \vee t \geq 1 \Leftrightarrow \lg |x| \leq -\frac{1}{4} \vee \lg |x| \geq 1$$
$$\frac{3 \pm 5}{8} = \begin{matrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{matrix} \quad 0 < |x| \leq e^{-\frac{1}{4}} \vee |x| \geq e$$

$$\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{4}} \leq x < 0 \vee 0 < x \leq e^{-\frac{1}{4}} \vee x \leq -e \vee x \geq e.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}) \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

perché prodotto di un termine infinitesimo per uno ($\sin \frac{1}{x}$) limitato.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}) \cdot \sin \frac{1}{x} \stackrel{\text{trascurando infinitesimi più lenti}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} \stackrel{\substack{1/x = y \\ y \rightarrow 0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Poiché il 1° limite vale 0, studio l'ordine di infinitesimo.

Essendo per $x \rightarrow 0$

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1} = \frac{x^2+1 - x - 1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}} \approx \frac{-x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}} \approx -\frac{1}{2}x$$

trascurando l'infinitesimo più veloce

si ha

$$g(x) = (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}) \operatorname{sen} \frac{1}{x} \approx -\frac{1}{2}x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} \nexists$ e non si mantiene limitato discosto da 0,

l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ non è confrontabile con 1
ma $\varepsilon > 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$ essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^{1-\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^\varepsilon \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{prodotto di funz. infinitesime per funz. limitata})$$

5. $ID(h) \quad \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad ID(h) = [-\frac{1}{2}, 1]$ Per T. di Weierstrass h ha minimo e massimo assoluti m e M .

i) $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 - \frac{|\arcsen x|}{\arcsen x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\forall x: \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \arcsen x \neq 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases}$

h' ha senso $\forall x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, 1[$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} h'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h'(x) = -\infty$,

segue che $x=0$ pt. angoloso, $x=-\frac{1}{2}$ e $x=1$ pt. a tangente vert.

Dunque h non è derivabile nel suo dominio ma lo è solo in $]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, 1[$.

ii) Poiché $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsen x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \arcsen x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1-x^2 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

segue che

$$A_1 = \{ \text{pti interni in cui } h'(x) = 0 \} = \emptyset$$

$$A_2 = \{ \text{pti interni in cui } h \text{ non è derivabile} \} = \{0\}$$

$$A_3 = \{ \text{pti estremi del dominio} \} = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Poiché $h(0) = 1$, $h(-\frac{1}{2}) = -|\arcsin(-\frac{1}{2})| = -\frac{\pi}{6}$, $h(1) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

segue che $m = -\frac{\pi}{6}$, $M = 1$.

Per Teorema di Bolzano, il codominio di h è $[-\frac{\pi}{6}, 1]$.

iii) L'equazione $h(x) = \alpha$ ha perciò soluzioni $\forall \alpha \in [-\frac{\pi}{6}, 1]$.