

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

9 Dicembre 2014

1. Trovare e disegnare poi nel piano complesso le radici dell'equazione

$$iz^2 + \bar{z}^2 = 0$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

e disegnarne il grafico qualitativo. Dire poi se f è invertibile e, se possibile, trovare l'inversa.

3. Data la funzione

$$g(x) = \sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

i) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in $[0, 1[$, in $]1, 2]$ e in $[2, +\infty)$;

ii) calcolare l'integrale indefinito di g .

4. Data la funzione

$$h(x) = \arctan \frac{2|x|}{x^2 + 1},$$

i) trovare eventuali estremi relativi ed assoluti;

ii) trovare il codominio di h .

5. Determinare gli asintoti della funzione

$$y = \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right)^x.$$

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ si ha $z^2 = x^2 + 2xyi - y^2$
 $\bar{z} = x - iy$ $\bar{z}^2 = x^2 - 2xyi - y^2$

Sostituendo: $ix^2 + 2xyi^2 - iy^2 + x^2 - 2xyi - y^2 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 - 2xy - y^2 + i(x^2 - 2xy - y^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy - y^2 = 0 \end{cases} \text{ stesse equazioni!}$$

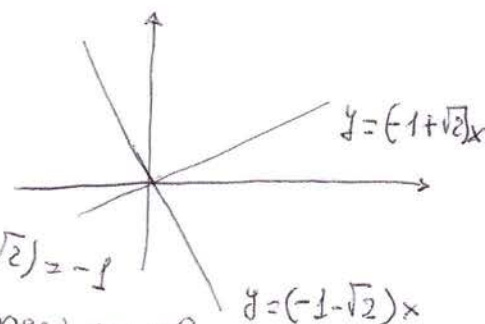
$x^2 - 2xy - y^2 = 0$ eq. di 2° in 2 incognite: risolvo rispetto a y :

$$y^2 + 2xy - x^2 = 0 \quad y_{1/2} = -x \pm \sqrt{x^2 + 2x^2} = (-1 \pm \sqrt{2})x$$

$$y = (-1 - \sqrt{2})x$$

$$y = (-1 + \sqrt{2})x$$

eq. di due rette per l'origine



N.B. Le due rette sono $\perp$ perché $m_1 \cdot m_2 = (-1 - \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) = -1$

Le radici dell'equazione sono tutti e soli i numeri complessi che sono rappresentati dai punti delle rette in figura.

2. $f(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$ ID: $1 - \sqrt[3]{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$

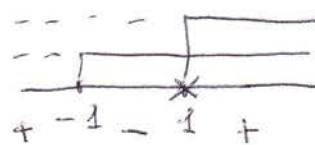
ID = $\mathbb{R} - \{1\}$ f non è né pari né dispari perché ID non è simmetrico rispetto all'origine

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ 1 + \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \quad \sqrt[3]{x} = -1 \quad x = -1 \quad (-1, 0)$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x} > 0 & x > -1 \\ 1 - \sqrt[3]{x} > 0 & x < 1 \end{cases}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$



Asintoti:

$\lim_{x \rightarrow +1^\pm} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{0^\pm} = \mp \infty$

$x = 1$ A.V. da dx che asintota

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} = \lim_{\substack{\sqrt[3]{x} = y \\ y \rightarrow \pm \infty}} \frac{1 + y}{1 - y} = -1 \quad y = -1$ A.O. a $\pm \infty$

$$y' = \frac{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (1 - \sqrt[3]{x}) + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} (1 + \sqrt[3]{x})}{(1 - \sqrt[3]{x})^2} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x^2} (1 - \sqrt[3]{x})^2} \quad \forall x \neq 0$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} y' = +\infty$ segue che $\exists f'(0) = +\infty$
 $x=0$ pto a tangente verticale

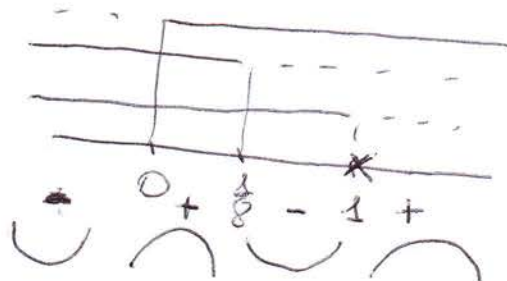
$$y'' = -\frac{2}{3} \frac{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (1-\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}^2 \cdot 2(1-\sqrt[3]{x}) \left(\frac{-1}{3\sqrt[3]{x}^2}\right)}{\sqrt[3]{x}^4 (1-\sqrt[3]{x})^4} = -\frac{4}{9} \frac{(1-\sqrt[3]{x}) \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x}^4 (1-\sqrt[3]{x})^4}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt[3]{x})(1-2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} < 0 \Leftrightarrow (1-\sqrt[3]{x})(1-2\sqrt[3]{x}) \sqrt[3]{x} < 0$$

$$1-\sqrt[3]{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$$

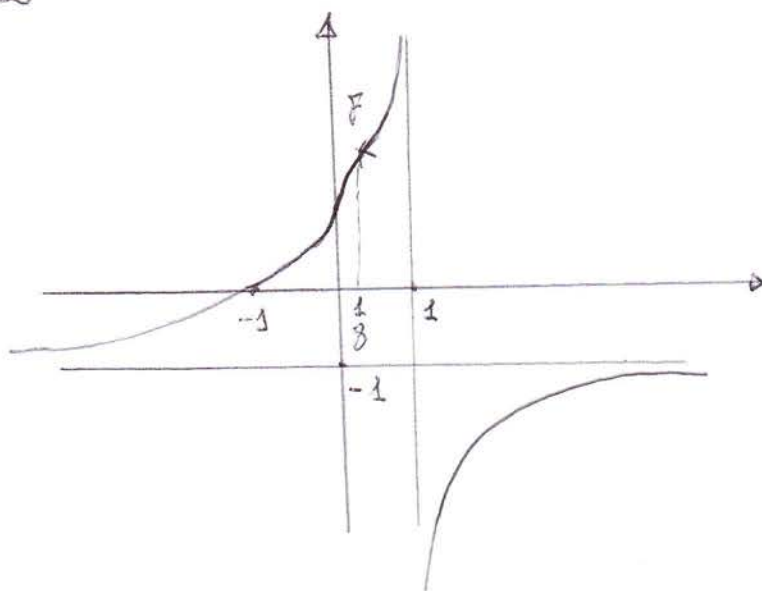
$$1-2\sqrt[3]{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$



$x=0$ pto a tangente verticale; grà d'inf

$x = \frac{1}{8}$ flesso



f è invertibile perché è iniettiva (ogni retta orizzontale incontra il grafico in al più un punto)

Poiché $f(\mathbb{R} - \{-1\}) = \mathbb{R} - \{-1\}$ (codominio di f) segue che

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

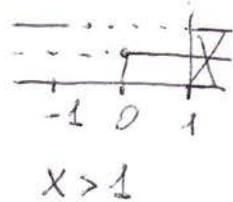
$$y = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow y - \sqrt[3]{x} = 1 + \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}(1+y) = y-1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{y-1}{y+1} \quad (y \neq -1) \Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3$$

Concludendo: $\forall y \in \mathbb{R} - \{-1\}: f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3$

$$3. \quad g(x) = \sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$ID: \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$



i)

$$\text{Perché } ID(g) =]1, +\infty)$$

g non è integrabile in s.i. in $[0, 1[$ perché non è ivi definita

In $[1, 2]$ invece g è continua e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{con ordine lento perché il logaritmo} \\ \rightarrow +\infty \text{ lentamente se } x \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow g$ è integ. in s.i. in $[1, 2]$.

In $[2, +\infty)$ g è continua e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1} = +\infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ per $x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln \frac{2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \text{con ordine } \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow g$ non è integ. in s.i. in $[2, +\infty)$.

$$ii) \quad \int \sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1} dx = \int_{\substack{\sqrt{x}=t \\ x=t^2}} t \ln \frac{t^2+1}{t^2-1} \cdot 2t dt = 2 \int t^2 \ln \frac{t^2+1}{t^2-1} dt$$

$x=t^2 \quad dx=2t dt$

$$= 2 \int \left(1 + \frac{t^3}{3} \right) \ln \frac{t^2+1}{t^2-1} dt = \frac{2}{3} t^3 \ln \frac{t^2+1}{t^2-1} - \frac{2}{3} \int t^3 \frac{t^2-1}{t^2+1} \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt$$

integrazione per parti

$$= \frac{2}{3} t^3 \ln \frac{t^2+1}{t^2-1} + \frac{8}{3} \int \frac{t^4}{t^4-1} dt \quad \text{Risolvo il 2° integrale a parte}$$

$$\int \frac{t^4-1+1}{t^4-1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} \right) dt = t + \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \right) dt$$

Faccio i conti nel 2° integrale e trovo

2

$$A(t+1)(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2+1) = 1 \quad \begin{matrix} \text{x principio di} \\ \text{identità dei} \\ \text{polinomi} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases}$$

Sottraendo la 3ª dalla 1ª: $2C=0 \Rightarrow C=0$

Sottraendo la 4ª dalla 2ª: $2D=1 \Rightarrow D=\frac{1}{2}$

Sostituendo C e D nelle 3ª e 4ª:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A=\frac{3}{4}, B=-\frac{3}{4}$$

e quindi

$$\int \frac{1}{t^4-1} dt = \int \left(\frac{\frac{3}{4}}{t-1} + \frac{-\frac{3}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2+1} \right) dt = \frac{3}{4} \log|t-1| - \frac{3}{4} \log|t+1| + \frac{1}{2} \arctg t = \frac{3}{4} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2} \arctg t$$

Raccogliendo i vari pezzi e sostituendo $t=\sqrt{x}$ si ottiene che

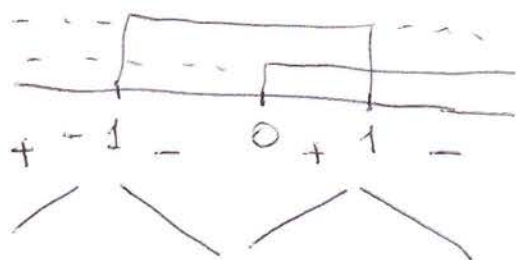
$$\int g(x) dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \log \frac{x+1}{x-1} + \frac{8}{3} \sqrt{x} + \frac{3}{4} \log \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + \frac{1}{2} \arctg \sqrt{x} + C.$$

4. $ID(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2|x|}{x^2+1} \right)^2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{|x|} \cdot \frac{(x^2+1) - 2x|x|}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{2|x|}{x^2+1} \right)^2} \cdot \frac{x^3+x-2x^3}{|x|(x^2+1)^2}$$

$$ID(h') = ID(\mathbb{R}) - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) \geq 0 \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{matrix}$$



$$M \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 0 \\ y = \arctg 0 = 0 \end{cases}$$

Si tratta per il momento di minimo e massimo relativo.

Però: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arctg \frac{2|x|}{x^2+1} = \arctg 0 = 0$ segue che il

minimo assoluto vale 0 e il massimo assoluto è $\frac{\pi}{4}$.

ii) Dunque $\Phi(\mathbb{R}) = [0, \frac{1}{4}]$ (per Teor. di Bolzano)

(5)

$$5. \text{ ID: } \begin{cases} \frac{2^x-1}{2^x+1} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{2^x-1}{2^x+1} = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x-1 > 0 \vee \begin{cases} 2^x=1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \vee \begin{cases} x=0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{ID} =]0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x-1}{2^x+1} \right)^x = (1)^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \lg \frac{2^x-1}{2^x+1}}$$

Per di $\lg \frac{2^x-1}{2^x+1} = \lg \left(1 + \frac{2}{2^x+1} \right) \underset{\substack{y \rightarrow 0 \\ \text{se } x \rightarrow +\infty}}{\sim} -\frac{2}{2^x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \lg \frac{2^x-1}{2^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{2}{2^x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{x}{2^x+1} = 0$$

e quindi il limite iniziale vale $e^0 = 1 \Rightarrow$ per gli ordini $\boxed{y=1 \text{ A. 02433. } a \rightarrow \infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x-1}{2^x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \lg \frac{2^x-1}{2^x+1}} = e^0 = 1$$

Per di

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lg \frac{2^x-1}{2^x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x \lg(2^x-1)}_{0(+\infty)=0} - \underbrace{x \lg(2^x+1)}_{0 \cdot \lg 2 = 0} = 0$$

Essendo logaritmo un infinito molto lento a 0 oppure direttamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lg(2^x-1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(2^x-1)}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x \lg 2}{2^x-1} \cdot (-x^2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\lg 2 \cdot 2^x \cdot x \left(\frac{x}{2^x-1} \right) \rightarrow \frac{1}{4} 2 = 0. \text{ Conclusione: } \nexists \text{ A. Verticale}$$