

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

13 Ottobre 2014

1. Calcolare e disegnare poi nel piano complesso le radici quarte del numero

$$z = 25 + [(2i + 1)(-1 + 2i)]^2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^3 \left(\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right)^3.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log |x - \sqrt{2x^2 - x}|$$

e disegnarne il grafico qualitativo. Si consiglia di omettere lo studio del segno della derivata seconda.

3. Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - e^{2x} - e^x - 2},$$

i) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso classico o in senso improprio in $[0, 1]$, in $[1, 2]$ e in $[2, +\infty)$;

ii) calcolare l'integrale indefinito.

4. Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ (se si è in difficoltà, prendere $\alpha = 3$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[7]{1 + \sin^3 x} - 1 - \arctan x^3}{x^\alpha}.$$

Svolgimento

1. Poiché $[(2i+1)(-1+2i)]^2 = (4i^2 - 1)^2 = (-4 - 1)^2 = 25$

$$(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})^3 (\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})^3 = (\cos \frac{4\pi}{8} + i \sin \frac{4\pi}{8})^3 = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi = -i$$

occorre calcolare

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{25 - 25i} = \sqrt[4]{25(1-i)} = \sqrt[4]{25} \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{25} \sqrt[4]{2} (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$$

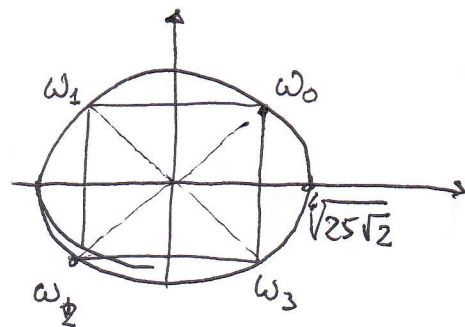
$$= \left\{ \sqrt[4]{25} \sqrt[4]{2} (\cos \frac{7\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi + 2k\pi}{4}) \mid k=0,1,2,3 \right\}$$

$$\omega_0 = \sqrt[4]{25\sqrt{2}} (\cos \frac{7}{16}\pi + i \sin \frac{7}{16}\pi)$$

$$\omega_1 = \sqrt[4]{25\sqrt{2}} (\cos \frac{15}{16}\pi + i \sin \frac{15}{16}\pi)$$

$$\omega_2 = \sqrt[4]{25\sqrt{2}} (\cos \frac{23}{16}\pi + i \sin \frac{23}{16}\pi) = -\omega_0$$

$$\omega_3 = \sqrt[4]{25\sqrt{2}} (\cos \frac{31}{16}\pi + i \sin \frac{31}{16}\pi) = -\omega_1$$



Le quattro radici sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $r = \sqrt[4]{25\sqrt{2}}$

$$2. \begin{cases} |x - \sqrt{2x^2 - x}| > 0 \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2x^2 - x} \neq 0 \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \sqrt{2x^2 - x} \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 2x^2 - x \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, x \neq 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0[\cup [\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty)$$

f non è né pari né dispari poiché il suo dominio non è simmetrico rispetto all'origine.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |x - \sqrt{2x^2 - x}| > 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{2x^2 - x} < -1 \vee x - \sqrt{2x^2 - x} > 1$$

$$\Leftrightarrow x+1 < \sqrt{2x^2 - x} \vee x-1 > \sqrt{2x^2 - x} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 2x^2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x^2 - x \geq 0 \\ (x-1)^2 < 2x^2 - x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

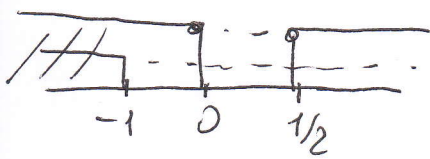
$$\vee \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 3x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$$

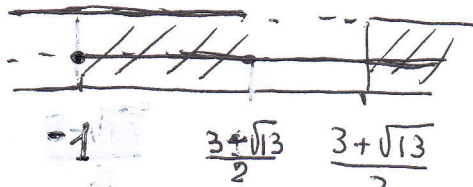
$$\begin{cases} x < -1 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \vee$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \vee$$

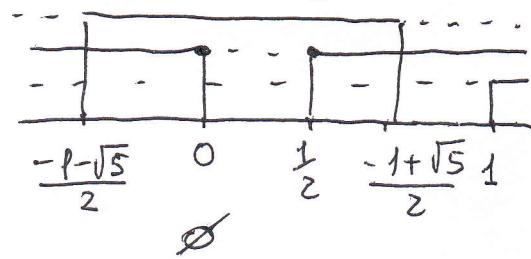
$$\begin{cases} x > 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



$$x < -1$$



$$x > \frac{3+\sqrt{13}}{2} \vee -1 \leq x < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$



Conclusion: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, 0\right) \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lg\left|\frac{1}{2}\right| = -\lg 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \lg |y| = -\infty$$

$$x = 0$$

Asintoto vert. a sin

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \lg |y| = -\infty$$

$$x = 1$$

Asintoto vert. completo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg |x - \sqrt{2x^2 - x}| = \lim_{y \rightarrow -\infty} \lg |y| = +\infty$$

$\nexists$ As. obliq. a $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg |x - x\sqrt{2 - \frac{1}{x}}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg \underbrace{\left|x \left(1 - \sqrt{2 - \frac{1}{x}}\right)\right|}_{-0} = +\infty$$

Asintoti obliqui

$\nexists$ as. obliq. a $\pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg |x - \sqrt{2x^2 - x}|}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underbrace{x - \sqrt{2x^2 - x}}_{-\infty}} \left(1 - \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-1}}\right) = -\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$

$-\infty$ $1 \mp \frac{4}{2\sqrt{2}} > 0$

N.B. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x(4-\frac{1}{x})}{2|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x \cdot 4}{2\sqrt{2}|x|} = \pm \frac{4}{2\sqrt{2}}$

$$y' = \frac{1}{x - \sqrt{2x^2 - x}} \left(1 - \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}} \right)$$

$$ID(y'): \begin{cases} x - \sqrt{2x^2-x} \neq 0 \\ 2x^2-x > 0 \end{cases}$$

$$ID(y') = ID(y) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y' = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 0^+} \right) = -\infty$$

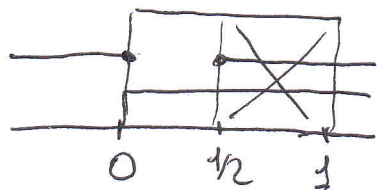
La funzione parte dal punto $(\frac{1}{2}, -\log 2)$ con tangente verticale

$$y' > 0$$

$$x - \sqrt{2x^2-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{2x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 > 2x^2-x \quad 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$1 - \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x^2-x} > 4x-1 \\ 2x^2-x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

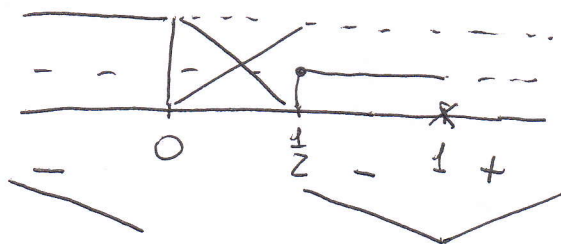
$$\begin{cases} 4x-1 < 0 \\ 2x^2-x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 8x^2-4x > 16x^2-8x+1 \\ 8x^2-4x+1 < 0 \quad \Delta < 0 \end{cases}$$

$$4x-1 \geq 0$$

$$8x^2-4x > 16x^2-8x+1$$

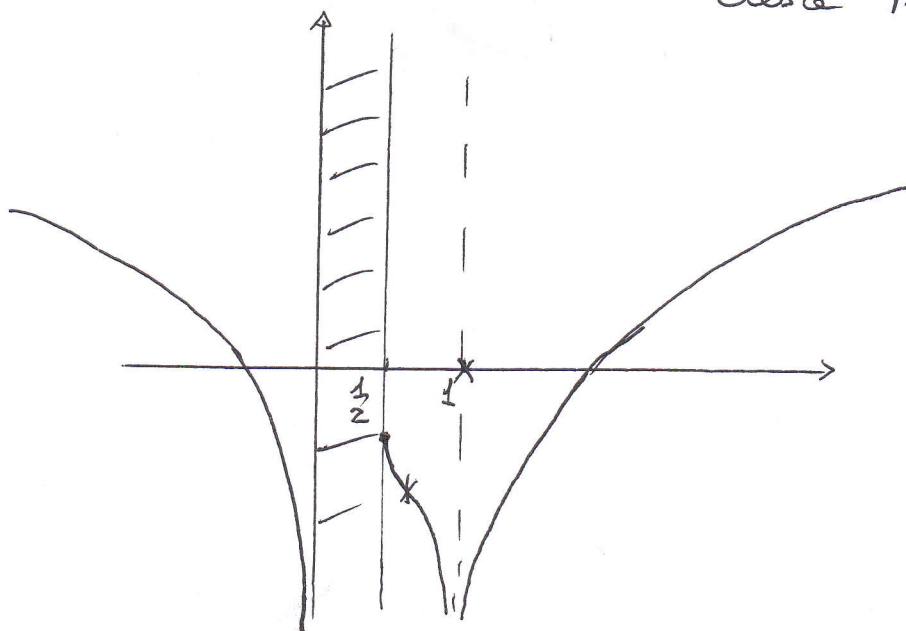
$$8x^2-4x+1 < 0 \quad \Delta < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{4} \\ x < 0 \vee x > \frac{1}{2} \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ \emptyset \\ \emptyset \end{cases}$$



Studio il segno del prodotto nel dominio di f

f decresce in $(-\infty, 0[$ e in $[\frac{1}{2}, 1[$
cresce in $]1, +\infty)$



f ha un pto di flesso di ascisse tra $\frac{1}{2}$ e 1

Per $x \rightarrow \pm\infty$ f cresce come il logaritmo e quindi è convessa

3. i) Poidi $e^{3x} - e^{2x} - e^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow e^x = t \quad t^3 - t^2 - t - 2 \neq 0$ (4)

$$(t-2)(t^2+t+1) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \lg 2 \quad g \text{ è definita in } \mathbb{R} - \{\lg 2\}$$

Essendo $\lg 2 \in]0, 1[$ per vedere se g è integ. in s.i. in $[0, 1]$

vedo se b è in $[0, \lg 2[$ e $]\lg 2, 1]$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow \lg 2^-} \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - e^{2x} - e^x - 2} \stackrel{e^x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{t^3 + 1}{(t-2)(t^2+t+1)} = +\infty \quad \text{con ord 1}$$

segue che g non è integ. in s.i. in $[0, 1]$.

Invece g è integ. in senso classico in $[1, 2]$ perché definita e sempre continua in un intervallo chiuso e limitato.

Infine g non è integ. in s.i. in $[2, +\infty)$ perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - e^{2x} - e^x - 2} \stackrel{e^x = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 1}{t^3 - t^2 - t - 2} = 1 \neq 0.$$

ii) $\int g(x) dx = \int \frac{t^3 + 1}{t^3 - t^2 - t - 2} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^3 + 1}{t(t-2)(t^2+t+1)} dt \quad e^x = t \Rightarrow x = \lg t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1} \right) dt = \quad \text{Per il principio di identità dei polinomi segue che}$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A+B-2C+D=0 \\ -A+B-2D=0 \\ -2A=1 \end{cases}$$

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} B = \frac{3}{2} - C \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - C - 2C + D = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - C - 2D = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} D &= -2 + 3(2-2D) = 4-6D \\ &\rightarrow C = 2-2D \\ A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} D = \frac{4}{7} \\ C = 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7} \\ B = \frac{3}{2} - \frac{6}{7} = \frac{9}{14} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \int -\frac{1}{2} \frac{1}{t} dt + \frac{9}{14} \int \frac{dt}{t-2} + \int \frac{\frac{6}{7}t + \frac{9}{14}}{t^2+t+1} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \lg |t| + \frac{9}{14} \lg |t-2| + \frac{3}{7} \int \frac{2t + \frac{3}{2}}{t^2+t+1} dt$$

(5)

$$= -\frac{1}{2} \lg|t| + \frac{9}{14} \lg|t-2| + \frac{3}{7} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+t+1} dt$$

$$\Delta = -3$$

$$= -\frac{1}{2} \lg|t| + \frac{9}{14} \lg|t-2| + \frac{3}{2} \lg(t^2+t+1) + \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \lg \frac{e^x}{x} + \frac{9}{14} \lg|e^x-2| + \frac{3}{2} \lg(e^{2x}+e^x+1) + \frac{3}{7\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^x+1}{\sqrt{3}} + c$$

4. Poiché $\sqrt[3]{1+\sin^3 x} - 1 = (1+\sin^3 x)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3} \sin^3 x \sim \frac{1}{3} x^3$ per $x \rightarrow 0$
 $\operatorname{arctg} x^3 \sim x^3$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3} x^3 - x^3}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{3} x^3}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 3 \\ -\frac{6}{3} & \alpha = 3 \\ -\infty & \alpha > 3 \end{cases}.$$