

# Corso di laurea triennale in Chimica

## Esame di Istituzioni di Matematiche I

17 Settembre 2014

1. Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^4 + 2(\sqrt{3} - i)z^2 + 3 - 2\sqrt{3}i = \left( \frac{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \right)^{21}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = x \left( e^{-\frac{1}{x-1}} + 1 \right)$$

e disegnarne il grafico qualitativo.

3. Data la funzione

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{(x-1)^3} (\sqrt{x-1} - 1)},$$

i) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in  $]0, 1]$ , in  $]1, 2]$  e in  $[2, +\infty)$ ;

ii) determinare la primitiva che si annulla in  $x = 2$ .

4. Calcolare il seguente limite al variare di  $\alpha \in \mathbf{R}$  (se si è in difficoltà, prendere  $\alpha = 1$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_{0,5} \left( 1 + x - \sqrt{-2x^2 + x + 1} \right)}{x^\alpha}.$$

5. Studiare la disequazione

$$\log_{0,5} \left( 3 + x - \sqrt{2x^2 - x - 1} \right) \leq -1.$$

# Svolgimento

1. Poiché  $\left( \frac{\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} \right)^{21} = \left( \cos \left( \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} \right) \right)^{21} = \cos \left( -\frac{4}{21} \cdot 21 \right) \pi + i \sin \left( -\frac{4}{21} \cdot 21 \right) \pi = 1,$

l'equazione diventa

$$z^4 + 2(\sqrt{3}-i)z^2 + 3 - 2\sqrt{3}i = 1 \Leftrightarrow z^4 + 2(\sqrt{3}-i)z^2 + 2 - 2\sqrt{3}i = 0$$

Posto  $w = z^2$ , si ha  $w^2 + 2(\sqrt{3}-i)w + 2 - 2\sqrt{3}i = 0$ .

Poiché  $\Delta = (\sqrt{3}-i)^2 - (2 - 2\sqrt{3}i) = 3 - 2\sqrt{3}i - 2 + 2\sqrt{3}i = 1$ ,

si ha  $w = -(\sqrt{3}-i)$  e quindi  $z = \sqrt{-\sqrt{3}+i} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$   
 $= \left\{ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2} \right) \mid k=0,1 \right\} = \pm \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

2.  $f(x) = x \left( e^{-\frac{1}{x-1}} + 1 \right)$

ID =  $\mathbb{R} - \{1\}$   $f$  non è né pari né dispari (perché ID non è simmetrico)

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0, x \neq 1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^y + 1) = +\infty$

$x=1$  A.V. a sinistra

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (e^y + 1) = 1$

$f$  prolung. per continuità per  $x \rightarrow 1^+$

$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = \mp \infty$   $\text{Z as. obliq.}$

$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \left( e^{-\frac{1}{x-1}} + 1 \right) = 1 + 1 = 2 \text{ (m)}$

$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} x \left( e^{-\frac{1}{x-1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}} - 1}{-\frac{1}{x-1}}$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1$

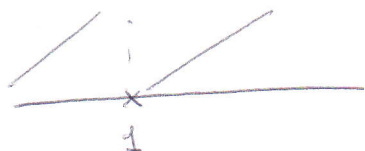
$y = 2x - 1$  as. obliquo per  $x \rightarrow \pm \infty$ .

$$y' = e^{-\frac{1}{x-1}} + 1 + x \cdot e^{-\frac{1}{x-1}} \cdot \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) = e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right) + 1$$

$$y' > 0 \quad \forall x \neq 1 \quad \text{poiché}$$

$$1 + \frac{x}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$$

$$\Delta < 0 \quad \forall x \neq 1$$



$f$  è strett. crescente in  $(-\infty, 1[$  e

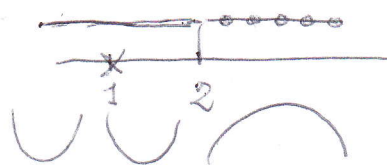
in  $]1, +\infty)$ .  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = 0(+\infty) = 0$

(per gli ordini)

$$y'' =$$

$$e^{-\frac{1}{x-1}} \left(\frac{1}{(x-1)^2}\right) \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2}\right) + e^{-\frac{1}{x-1}} \left(\frac{(x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \cdot \frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

$$y'' > 0 \Rightarrow -x+2 > 0 \quad x < 2$$



$f$  convessa in  $(-\infty, 1)$  e in  $(1, 2)$

concava in  $(2, +\infty)$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2(e^{-1} + 1) \end{cases} \text{ pto di flesso}$$

3. i) La funzione  $g$  è definita  $\forall x$  e continua  $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \sqrt{x-1} \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[$

Poiché  $g$  non è definita in  $]0, 1[$ , non è irriducibile in s.i.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x-1}^3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x-1}-1} = -\infty \quad \text{con ord } \frac{3}{2} > 1$$

$\Rightarrow g$  non è integ. in s.i. in  $]1, 2[$ .

(Non serve studiare  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$  poiché  $g$  non è int. vicino 1).

Poiché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{(x-1)^3}(\sqrt{x-1}-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^{3/2} \cdot x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$   
 per gli ordini con ord. 1

$\Rightarrow g$  non è integ. in a.i. in  $[3, +\infty)$ .

ii) Posto  $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow x = 1+t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\int g(x) dx = \int \frac{t^2+1}{t^2(t-1)} 2t dt = 2 \int \frac{t^2+1}{t^2(t-1)} dt = 2 \int \frac{1}{t-1} dt + 2 \int \frac{1}{t^2(t-1)} dt$$

$$= 2 \lg|t-1| + 2 \int \left( \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} \right) dt \quad \begin{matrix} A=B=-1 \\ C=1 \end{matrix}$$

$$= 2 \lg|t-1| - 2 \lg|t| - \frac{2}{t} + 2 \lg|t-1| + \text{cost}$$

$$= 4 \lg|\sqrt{x-1}-1| - 2 \lg \sqrt{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x-1}} + C.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg_{1/2}(1+x-\sqrt{-2x^2+x+1})}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{+\infty}{0^+} = +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{+\infty}{1} = +\infty & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{+\infty}{+\infty} = ? & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

Se  $\alpha < 0$  per Regola di de l'Hôpital:

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lg_{1/2} \left( \frac{1}{1+x-\sqrt{-2x^2+x+1}} \right)} \cdot \left( 1 - \frac{-4x+1}{2\sqrt{-2x^2+x+1}} \right)}{\alpha x^{\alpha-1}} \stackrel{\rightarrow 2}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\lg 2}{2\alpha} \left( 1 - \frac{-4x+1}{2\sqrt{-2x^2+x+1}} \right) \cdot \frac{1+x+\sqrt{-2x^2+x+1}}{(1+x)^2 - (-2x^2+x+1)} \cdot x^{-\alpha+1}}{1/2}$$

$$= -\frac{\lg 2}{2\alpha} \cdot 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha+1}}{3x^2+x} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{si poteva prevedere perché il} \\ \text{logaritmo per } x \rightarrow 0^+ \text{ è un infinito} \\ \text{di ordine comunque piccolo} \end{array} \right)$$

5.  $3+x-\sqrt{2x^2-x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 1+x \geq \sqrt{2x^2-x-1}$

$$\begin{cases} 2x^2-x-1 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1+2x+x^2 \geq 2x^2-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \geq -1 \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{3-\sqrt{17}}{2}, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ 1, \frac{3+\sqrt{17}}{2} \right]$$