

Corso di laurea triennale in Chimica

Esame di Istituzioni di Matematiche I

23 Aprile 2014

1. Determinare e rappresentare poi nel campo complesso i numeri z tali che

$$\left[\frac{1}{z+1-i} + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^{12} - (i)^{11} \right] \in \mathbf{R}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{|x^2 + x|} - x \right)$$

e disegnarne il grafico qualitativo. Dire poi se f è iniettiva, surgettiva, continua, derivabile

3. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{(\exp(x^2) - \cos(x^2))^2},$$

dire, giustificando la risposta, se è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

4. Calcolare

$$\int \log(x^3 + x^2 - 2) dx.$$

5. Determinare, se esistono, estremi relativi e assoluti, estremo inferiore ed estremo superiore di

$$h(x) = \exp \left(- \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| \right).$$

Soluzioni

1. Poiché

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^{12} = \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \right)^{12} = \cos 12 \cdot \frac{\pi}{8} + i \sin 12 \cdot \frac{\pi}{8} = -i$$

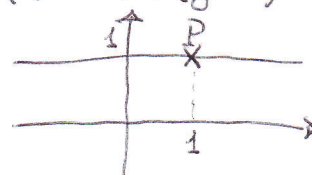
$$i^{11} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$$

segue che

$$\frac{1}{z+1-i} + \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^{12} - i^{11} = \frac{1}{x+1+i(y-1)} - 1 + i$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)^2 - (y-1)^2} + i \frac{y-1}{(x+1)^2 - (y-1)^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ (x+1)^2 \neq (y-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x \neq -1 \end{cases} \text{ cioè } z = x+i \text{ con } x \neq -1$$



Nel piano complesso si hanno tutti i pti della retta $y=1$ tranne $P(1,1)$

$$2. ID: \sqrt{|x^2+x|} > x \Leftrightarrow x < 0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ |x^2+x| > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x > 0 \vee \\ x^2+x > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x < 0 \\ -x^2-x > x^2 \\ \emptyset \end{cases} \quad ID = \mathbb{R}^* \quad \text{f non è né pari né dispari } x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{|x^2+x|} - x) = \lim_{y \rightarrow 0} \log_{\frac{1}{2}} y = +\infty \quad x=0 \text{ A. Ver.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{|x^2+x|} - x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \quad \left(\text{perché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{(\sqrt{x^2+x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+x} = \frac{1}{2} \right)$$

$$y=1 \quad \text{As. 02063. a} + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{|x^2+x|} - x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} y = -\infty \quad \text{As. 02063. a} + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{|x^2+x|} - x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{|x^2+x|} - x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{0}{\infty} = 0 \quad \text{As. d.l.}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{|x^2+x|} - x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{|x^2+x|} < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 > 0 \\ |x^2+x| < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x^2 + x \geq 0 \\ x(x+1) < (x+1)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x^2 + x < 0 \\ -x(x+1) < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x \geq 0 \\ x < x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x \leq 0 \\ -x < x+1 \end{cases}$$

$x > 0 \qquad -\frac{1}{2} < x < 0$

Conclusione $f(x) > 0$ per $x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty)$
 $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}[$
 $f(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{2} \vee x = -1$

$$f'(x) = \frac{1}{\lg \frac{1}{2} (\sqrt{|x^2+x|} - x)} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{|x^2+x|}} \cdot \frac{x^2+x}{|x^2+x|} (2x+1) - 1 \right)$$

$$ID(f') = ID(f) - \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\lg 2 (\sqrt{x^2+x} - x)} \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 \right) & \text{se } x^2+x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{1}{-\lg 2 (\sqrt{-x^2-x} - x)} \left(\frac{-(2x+1)}{2\sqrt{-x^2-x}} - 1 \right) & \text{se } x^2+x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \end{cases}$$

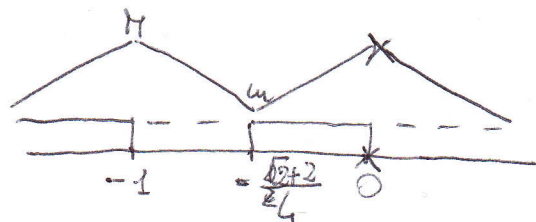
Poiché $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \frac{1}{-\lg 2(1)} \left(\frac{-1}{0^+} - 1 \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{1}{-\lg 2(1)} \left(\frac{1}{0^+} - 1 \right) = -\infty$

$x = -1$ pto cuspidale

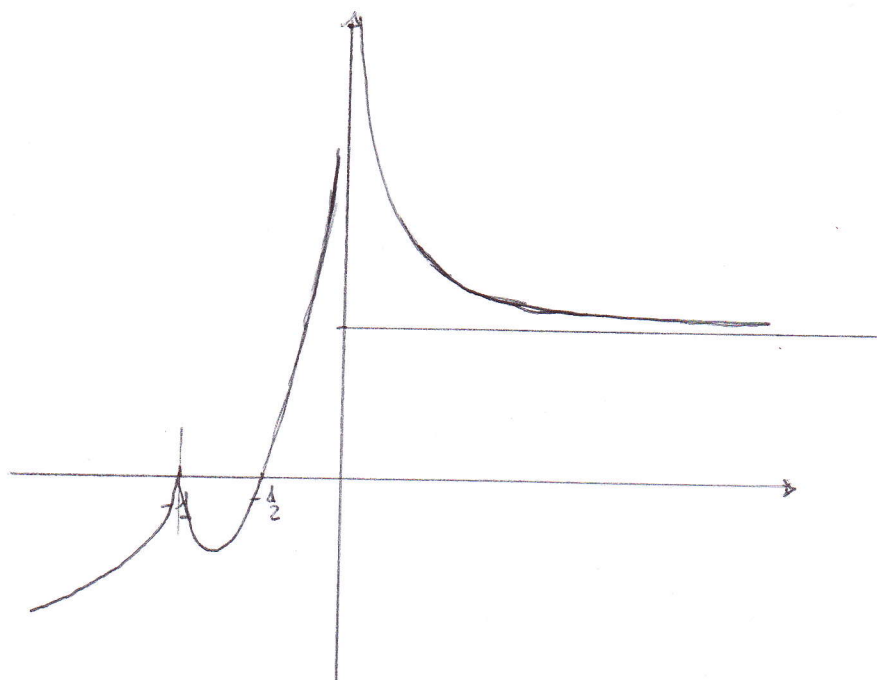
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ x > -\frac{1}{2} \vee -\frac{\sqrt{2}+2}{4} < x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{\sqrt{2}+2}{4} < x < 0$$



$$\Pi \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ y < 0 \end{cases}$$

Non studio il segno della derivata seconda perché troppo lungo.
 Dello studio del punto cuspidale $x = -1$ si intuisce però da $f(x)$
 e convesse per $x < -1$, $-1 < x < 0$, $x > 0$.



3. Poiché $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
 con $x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)$ e quindi $e^{x^2} - \cos x^2 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
 segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x} = +\infty$

e quindi la funzione non è integrabile in $]0,1]$ con ordine 1

Inoltre $f(x)$ è integrabile in a.i. in $[2, +\infty)$ poiché continua e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{(e^{x^2} - \cos x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{2}}{(e^{x^2})^2} = 0 \quad \text{con ordine molto grande e quindi } > x > 1.$$

4. Integrando per parti si ha

$$\int \lg(x^3 + x^2 - 2) dx = x \lg(x^3 + x^2 - 2) - \int \frac{x(3x^2 + 2x)}{x^3 + x^2 - 2} dx$$

Poiché $\frac{3x^3 + 2x^2}{3x^3 + 3x^2 - 6} = \frac{x^3 + x^2 - 2}{3} + \frac{-x^2 + 6}{3}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Il secondo integrale diventa

$$\int \left(3 - \frac{x^2 - 6}{x^3 + x^2 - 2} \right) dx = 3x - \int \frac{x^2 - 6}{x^3 + x^2 - 2} dx. \quad \text{Poiché } x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) \quad \Delta < 0$$

$$\frac{x^2 - 6}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+C-B)x + 2A-C}{x^3 + x^2 - 2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B+C=0 \\ 2A-C=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1-A \\ 2A-1+A+2A+C=0 \\ C=2A+6 \end{cases} \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \\ C=4 \end{cases}$$

Dunque

$$\int \frac{x^2-6}{x^3+x^2-2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx = -\lg|x-1| + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx +$$

$$\int \frac{2}{\underbrace{x^2+2x+2}_{(x+1)^2+1}} dx = -\lg|x-1| + \lg(x^2+2x+2) + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

e quindi

$$\int \lg(x^3+x^2-2) dx = x \lg(x^3+x^2-2) - 3x + \lg \left| \frac{x^2+2x+2}{x-1} \right| + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + c.$$

5. $ID = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = e^{-2}$$

$$h'(x) = -e^{-\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|} \left(\frac{\frac{2x+1}{x-2}}{\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|} \cdot \frac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} \right) = e^{-\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|} \left(\frac{\frac{2x+1}{x-2}}{\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|} \cdot \frac{5}{x-2} \right)$$

con $ID(h') = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ e $h'(-\frac{1}{2}) = 1$, $h'(x) = 0 \quad x \in \emptyset$

segue che

$$\min\{0, e^{-2}, 1\} = 0$$

e^{-2} è estremo inferiore di h (ma non è minimo perché non è valore assunto da h)

$$\max\{0, e^{-2}, 1\} = 1$$

1 è massimo di h (e coincide anche con l'estremo superiore di h)