

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(18/09/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(\log(|x|))^2 - 7\log(|x|) + 12}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|\cos(\sqrt{x})|} - 1}{\log(x+1)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(\sqrt{x})) - \cos(x) + 1}{\arcsen(e^{\arctan(x)} - 1)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}(x^2-4)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^4 - 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) = 0.$$

Svolgimento

$$1. \begin{cases} |x| \neq 0 \\ \lg^2 |x| - 7 \lg |x| + 12 \neq 0 \end{cases}$$

$$\lg |x| = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 & |x| = e^3 \\ 4 & |x| = e^4 \end{cases}$$

$$ID = \mathbb{R} - \{0, \pm e^3, \pm e^4\}$$

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID$$

Perché f è pari, studio la funzione per $x > 0$ e poi mi ribalto il grafico risp. asse y . Posso perciò togliere il valore assoluto.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 7 \lg x + 12 > 0 \Leftrightarrow \lg x < 3 \vee \lg x > 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < e^3 \vee x > e^4$$

Asintoti Verticali: $\lim_{x \rightarrow (e^3)^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow (e^4)^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lg^2 x - 7 \lg x + 12} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\nexists$ as. Verticale, in $x=0$ f prolungabile per continuità $x=e^3, x=e^4$ A.V.

Asintoti orizzontali

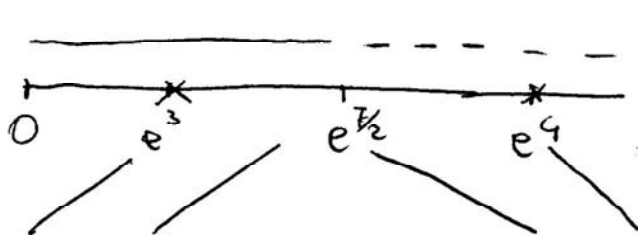
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lg^2 x - 7 \lg x + 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lg^2 x} = 0 \quad y=0 \text{ As. orizz.}$$

trascuriamo gli infiniti più lenti

Studio della derivata 1°

$$y' = - \frac{\frac{2 \lg x - 7}{x}}{(\lg^2 x - 7 \lg x + 12)^2} = - \frac{2 \lg x - 7}{x (\lg^2 x - 7 \lg x + 12)^2} \quad \forall x > 0 \quad x \neq e^3, e^4$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow 2 \lg x - 7 < 0 \quad \lg x < \frac{7}{2} \quad x < e^{7/2}$$



$$\begin{cases} x = e^{7/2} \\ y = \frac{1}{(\frac{7}{2})^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 12} \end{cases}$$

pto di massimo rel.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad \text{per gli ordini} \Rightarrow f \text{ parte da } 0 \text{ con tangente Verticale}$$

Studio della derivata seconda

(2)

$$y'' = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x(\lg^2 x - 7\lg x + 12)^2 + (2\lg x - 7) \left[(\lg^2 x - 7\lg x + 12)^2 + x \cdot 2(\lg^2 x - 7\lg x + 12) \left(\frac{2\lg x - 7}{x} \right) \right]}{x^2 (\lg^2 x - 7\lg x + 12)^2}$$

$$y'' \geq 0 \Leftrightarrow (\lg^2 x - 7\lg x + 12) \left[-2\lg^2 x + 14\lg x - 24 + (2\lg x - 7)(\lg^2 x - 7\lg x + 12) + 4\lg x \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lg^2 x - 7\lg x + 12) (-2\lg^2 x + 14\lg x - 24 + 2\lg^3 x - 7\lg^2 x - 6\lg^2 x + 21\lg x - 4\lg x + 14) > 0$$

$$I) \lg^2 x - 7\lg x + 12 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^3 \vee x > e^4$$

$$II) 2\lg^3 x - 15\lg^2 x + 31\lg x - 10 > 0 \quad \text{posto } t = \lg x \text{ studio della disp. di } 3^\circ$$

$$2t^3 - 15t^2 + 31t - 10 > 0 \quad \text{uso metodo grafico}$$

$$2t^3 > 15t^2 - 31t + 10 \quad (*)$$

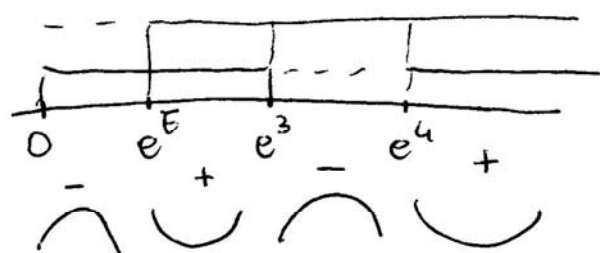
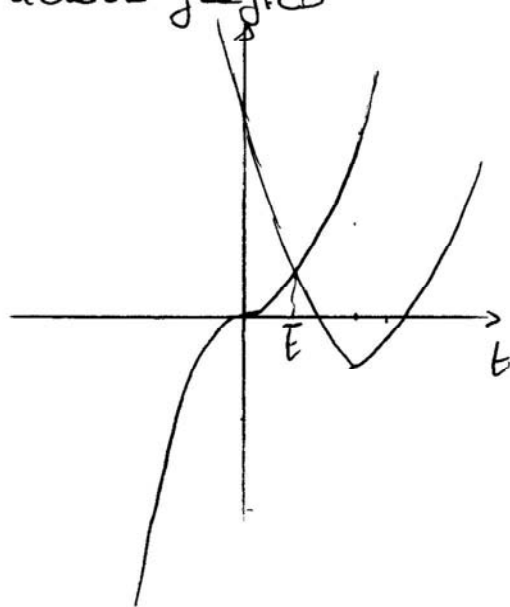
$$y = 15t^2 - 31t + 10$$

parabola di vertice $V(\frac{31}{30}, y_m)$

$$(0, 10) \quad t_{\pm} = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 600}}{30}$$

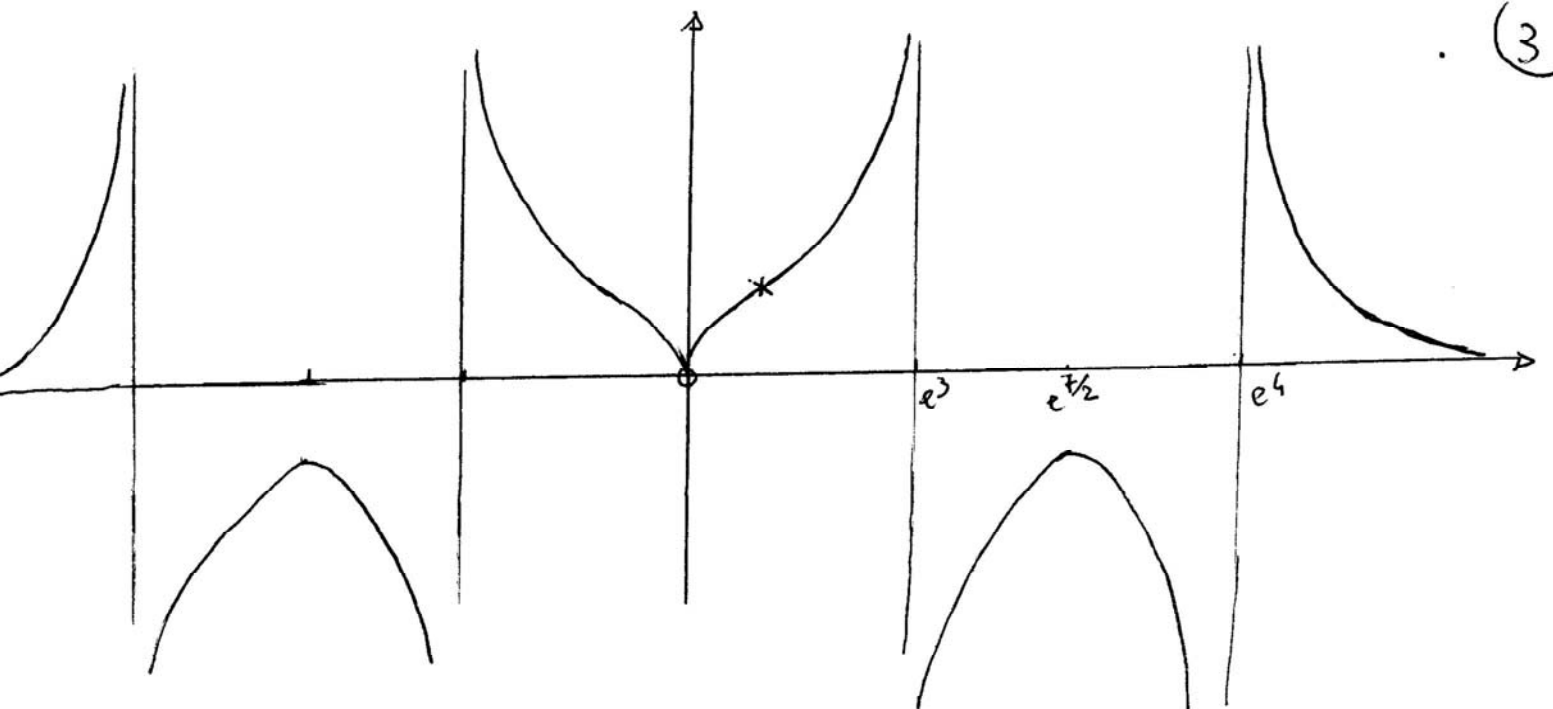
(*) è verificata per $t > \bar{t}$ con $0 < \bar{t} < 1$

$$\lg x > \bar{t} \quad x > e^{\bar{t}}$$



$x = e^{\bar{t}}$ unico punto di flesso
 $y = f(e^{\bar{t}})$ (si poteva dedurre l'esistenza omettendo i conti, lunghi, di $y'' > 0$

e ricordando che f parte da 0 con tangente verticale (quindi rivolta verso il basso) e arriva poi all'asintoto $x = e^3$ rivolta necessariamente verso l'alto).



2. la funzione f è continua per $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\cos \sqrt{x}|} - 1}{\lg(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\cos \sqrt{x}| - 1}{\lg(x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\cos \sqrt{x}|} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{\lg(x+1)}$$

$\downarrow$ $\frac{1}{2}$ Valgo 1 per $x \rightarrow 0$
 $\cos \sqrt{x}$ è positivo

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}{x} = -1$$

per $\cos \sqrt{x} - 1 \sim -\frac{(\sqrt{x})^2}{2}$, $\lg(1+x) \sim x$

Però f è limitata per $x \rightarrow 0$, e integrabile in senso classico in $[0, 1]$.

Però $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{|\cos \sqrt{x}|} - 1}{\lg(x+1)} = 0$ con ordine lento e quindi < 1

f non è integ. in senso improprio in $[1, +\infty)$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\cos \sqrt{x}) - \cos x + 1}{\arcsin(e^{\arctg x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}}{x} = -\frac{1}{2}$$

però per $x \rightarrow 0$ $\lg(\cos \sqrt{x}) = \lg(\cos \sqrt{x} - 1 + 1) \sim \cos \sqrt{x} - 1 \sim -\frac{x}{2}$
 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\arcsin(e^{\arctg x} - 1) \sim e^{\arctg x} - 1 \sim \arctg x \sim x$

4. Posto $\sqrt{x+5} = t \Rightarrow x = t^2 - 5 \Rightarrow dx = 2t dt$ e quindi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}(x^2-4)} = \int \frac{2t}{t((t^2-5)^2-4)} dt = 2 \int \frac{dt}{(t^2-5-2)(t^2-5+2)} = 2 \int \frac{dt}{(t^2-7)(t^2-3)}$$

$$= 2 \int \left(\frac{A}{t-\sqrt{7}} + \frac{B}{t+\sqrt{7}} + \frac{C}{t-\sqrt{3}} + \frac{D}{t+\sqrt{3}} \right) dt$$

(4)

dove A, B, C, D sono costanti, tali che

$$A(t+\sqrt{7})(t^2-3) + B(t-\sqrt{7})(t^2-3) + C(t+\sqrt{3})(t^2-7) + D(t-\sqrt{3})(t^2-7) = 1$$

$$\text{se } t = -\sqrt{7} \Rightarrow -2\sqrt{7}B \cdot 4 = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{8\sqrt{7}}$$

$$\text{e } t = \sqrt{7} \Rightarrow 2\sqrt{7}A \cdot 4 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8\sqrt{7}}$$

$$\text{se } t = -\sqrt{3} \Rightarrow -2\sqrt{3} \cdot (-4)D = 1 \Rightarrow D = +\frac{1}{8\sqrt{3}}$$

$$\text{e } t = \sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} \cdot (-4)C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{8\sqrt{3}}$$

Quindi l'integrale diventa

$$2 \left(\frac{1}{8\sqrt{7}} \log|t-\sqrt{7}| - \frac{1}{8\sqrt{7}} \log|t+\sqrt{7}| - \frac{1}{8\sqrt{3}} \log|t-\sqrt{3}| + \frac{1}{8\sqrt{3}} \log|t+\sqrt{3}| \right) + C$$

$$= \frac{2}{8\sqrt{7}} \log \left| \frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}} \right| + \frac{2}{8\sqrt{3}} \log \left| \frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{7}} \log \left| \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{7}} \right| + \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3}} \right| + C$$

$$5. \text{ Poiché } \left(\cos \frac{3\pi}{7} + i \sin \frac{3\pi}{7} \right) \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{5} \right) \pi + i \sin \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{5} \right) \pi$$

l'equazione diventa

$$w = \sqrt[4]{2 \left(\cos \frac{22}{35} \pi + i \sin \frac{22}{35} \pi \right)} = \sqrt[4]{2 \left(\cos \frac{\frac{22}{35} \pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{22}{35} \pi + 2k\pi}{4} \right)} \quad \left| \begin{matrix} k=0,1,2,3 \end{matrix} \right.$$

Dunque l'equazione ha 4 radici w date da

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11}{70} \pi + i \sin \frac{11}{70} \pi \right)$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{22}{35} \pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{22}{35} \pi + 2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{23}{35} \pi + i \sin \frac{23}{35} \pi \right)$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\left(\frac{22}{35} + 4 \right) \pi}{4} + i \sin \frac{\left(\frac{22}{35} + 4 \right) \pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{81}{70} \pi + i \sin \frac{81}{70} \pi \right) = -w_0$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\left(\frac{22}{35} + 6 \right) \pi}{4} + i \sin \frac{\left(\frac{22}{35} + 6 \right) \pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{58}{35} \pi + i \sin \frac{58}{35} \pi \right) = -w_1$$