

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(16/07/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x^2 + x| - \log(|1 - |x^2 + x||)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{\sqrt{x}} - \cos(x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)(\sqrt{1+x} - \cos(x))}{\sin(x)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{(\log(x))^2 + 3}{x(\log(x))^3 - 2x(\log(x))^2 + 3x \log(x)} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\bar{w}^2 - 2i\bar{w} + \left(\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \right) = 0.$$

Svolgimento

$$1. \text{ ID: } 1 - |x^2 + x| \neq 0 \quad |x^2 + x| \neq 1 \quad x^2 + x \neq \pm 1$$

$$x^2 + x - 1 \neq 0 \quad x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{ID} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$x^2 + x + 1 \neq 0 \quad \forall x$$

f non è né pari né dispari $f(0) = 0$ il grafico passa per $(0,0)$
 la disuguaglianza $f(x) > 0$ e l'equazione $f(x) = 0$ si potrebbero
 risolvere studiando con il metodo grafico, ma non è necessario farlo.

Asintoti Verticali

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}} f(x) = +\infty \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{As. Verticali}$$

Asintoti orizzontali e/o obliqui

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t - \lg|1 - t| = +\infty \quad \text{per gli ordini} \quad \nexists \text{ as. orizz.}$$

$$t = |x^2 + x|$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 + x|}{x} - \frac{\lg|1 - |x^2 + x||}{x} = \pm \infty \quad \nexists \text{ as. obliqui}$$

Studio della derivata 1ª

$$y' = \frac{x^2 + x}{|x^2 + x|} (2x + 1) - \frac{1}{1 - |x^2 + x|} \left(-\frac{x^2 + x}{|x^2 + x|} \right) \cdot (2x + 1) \quad \forall x \in \text{ID}(y) - \{0, -1\}$$

$$y' = \frac{x^2 + x}{|x^2 + x|} (2x + 1) \left(1 + \frac{1}{1 - |x^2 + x|} \right) = \frac{x^2 + x}{|x^2 + x|} \frac{(2x + 1)(2 - |x^2 + x|)}{1 - |x^2 + x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2x + 1)(2 - |x^2 + x|)}{1 - |x^2 + x|} = \frac{2}{1} = 2 \quad x = 0 \text{ pto angolare}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y' = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(2x + 1)(2 - |x^2 + x|)}{1 - |x^2 + x|} = \frac{2}{1} = 2 \quad x = -1 \text{ pto angolare}$$

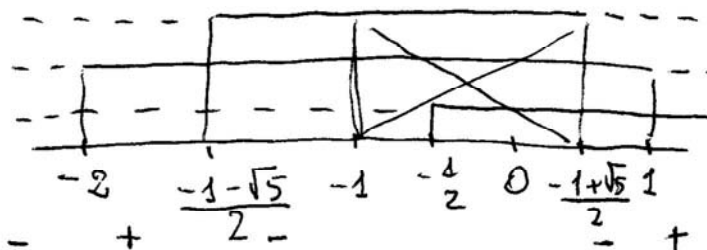
$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0, x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \frac{(2x + 1)(2 - x^2 - x)}{1 - x^2 - x} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{-(2x + 1)(2 + x^2 + x)}{1 + x^2 + x} > 0 \end{cases}$$

Per $x < -1$ o $x > 0$

$$2x + 1 > 0 \quad x > -\frac{1}{2}$$

$$2 - x^2 - x > 0 \quad -2 < x < 1$$

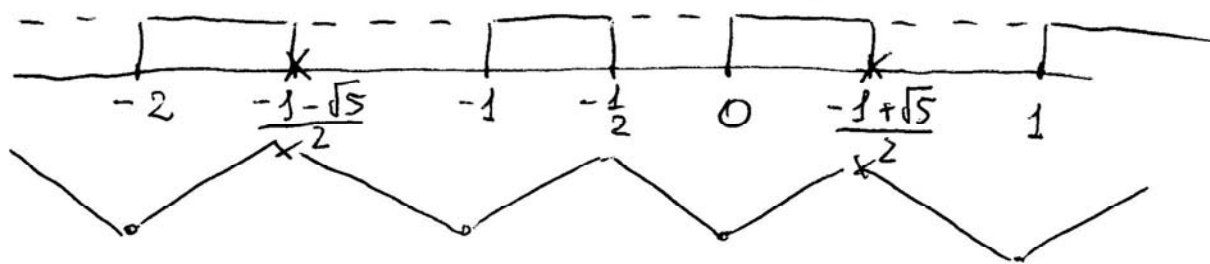
$$1 - x^2 - x > 0 \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$



Per $-1 < x < 0$

$$\frac{(2x+1)(2+x+x^2)}{1+x+x^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \quad -1 < x < -\frac{1}{2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee -1 < x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$$



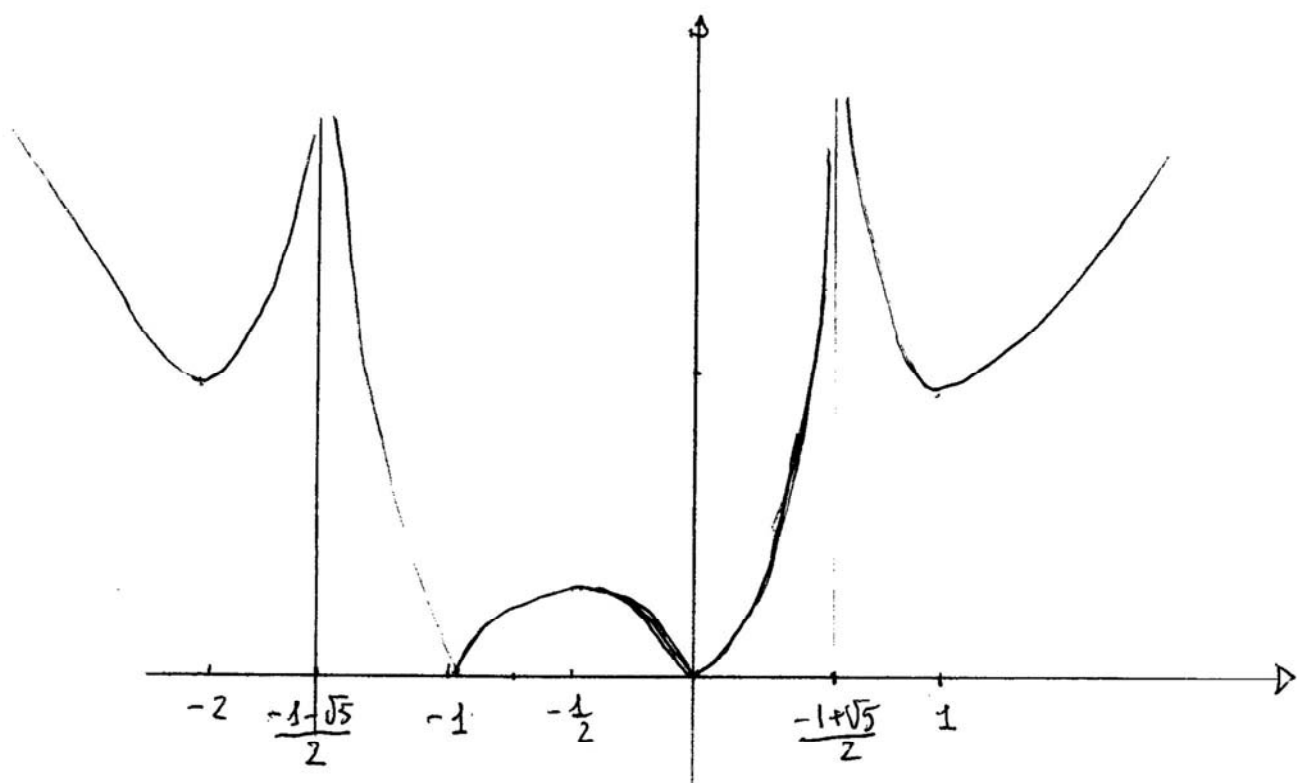
in $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

in $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

in $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} - \log \frac{3}{4} \end{cases}$

in $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

in $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$



Per brevità si omette lo studio del segno della derivata seconda

2. f è continua per $x > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{e^{\sqrt{x}} - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x} + \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

perché per $x \rightarrow 0^+$: $\sin x \sim x$, $e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x}$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x (\sqrt{1+x} - \cos x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2)}{x} = 0$$

poiché per $x \rightarrow 0^+$ $\arcsin x \sim x$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2} x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

4. Posto $\lg x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$\int \frac{(t^2+3)e^t}{e^t(t^2-2t+3)} dt = \int \frac{t^2+3}{t(t^2-2t+3)} dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2-2t+3} \right) dt$$

dove A e B sono tali che

$$A(t^2-2t+3) + Bt^2 + Ct = t^2 + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=0 \\ 3A=3 \end{cases} \begin{cases} B=0 \\ C=2 \\ A=1 \end{cases}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2-2t+3} \right) dt = \lg t + 2 \int \frac{1}{(t-1)^2+2} dt = \lg t + \int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt$$

$$= \lg |t| + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-1}{\sqrt{2}} \right) + C = \lg |\lg x| + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lg x - 1}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

$$5. \text{Poiché } \left(\cos \frac{9}{10} \pi + i \sin \frac{9}{10} \pi \right) \left(\cos \frac{3}{5} \pi + i \sin \frac{3}{5} \pi \right) = \\ = \cos \frac{15}{10} \pi + i \sin \frac{15}{10} \pi = -i$$

l'equazione diventa

$$\bar{\omega}^2 - 2i\bar{\omega} - i = 0 \quad \bar{\omega}_{\pm} = i \pm \sqrt{1+i}$$

$$\text{Poiché } \sqrt{1+i} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + 2k\pi + i \sin \frac{3}{4} \pi + 2k\pi \right) \\ = \pm \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3}{8} \pi + i \sin \frac{3}{8} \pi \right) \text{ si conclude che}$$

$$\bar{\omega} = \pm \sqrt[4]{2} \cos \frac{3}{8} \pi + i(1 \pm \sqrt[4]{2} \sin \frac{3}{8} \pi) \Rightarrow \omega = \pm \sqrt[4]{2} \cos \frac{3}{8} \pi - i(1 \pm \sqrt[4]{2} \sin \frac{3}{8} \pi).$$