

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(02/07/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |\log(|x|)| \sqrt[3]{x^2}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+1) \arctang\left(\frac{1}{x}\right)}{(\sin(x) + x)(\sqrt{1+x} - 1)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{\log(x^2 + 1)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2^{3x} - 3 \cdot 2^x}{2^{4x} - 3 \cdot 2^{3x} + 2^{2x+1}} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^4 - 32 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{9}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 0.$$

Svolgimento

1. $ID = \mathbb{R}^*$ $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ Poiché f è pari, lo studio per $x > 0$ e poi ne ribalzo il grafico rispetto all'asse y . Studio

$$f(x) = |\lg x| \sqrt[3]{x^2} \quad x > 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (1, 0)$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 1$$

Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 0} |\lg x| \sqrt[3]{x^2} = \infty \cdot 0 = 0$ per gli ordini $\neq$ as. verticali

Asintoti orizzontali e/o obliqui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\lg x| \sqrt[3]{x^2} = +\infty \quad \nexists \text{ as. orizz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\lg x| \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \quad \text{per gli ord.} \quad \nexists \text{ as. obliqui}$$

Studio della derivata prima

$$y' = \frac{\lg x}{|\lg x|} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} \sqrt[3]{x^2} + |\lg x| \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} =$$

$$= \frac{\lg x}{|\lg x|} \cdot x^{-1/3} + \frac{2}{3} |\lg x| x^{-1/3}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y' = \pm 1 \quad x = 1 \text{ pto angoloso}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^{-1/3} (3 \lg x + 2 \lg^2 x) > 0 \Leftrightarrow \lg x < -\frac{3}{2} \vee \lg x > 0$$

$$0 < x < e^{-3/2} \vee x > 1$$

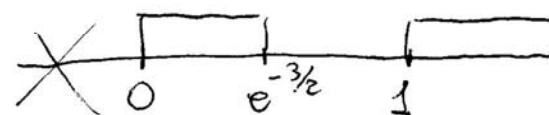
$$\begin{cases} x = e^{-3/2} \\ y = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \end{cases}$$

MA x rel.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

min rel e

assoluto

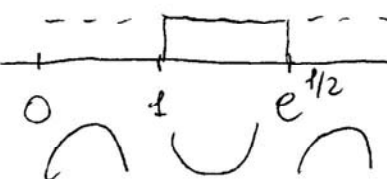


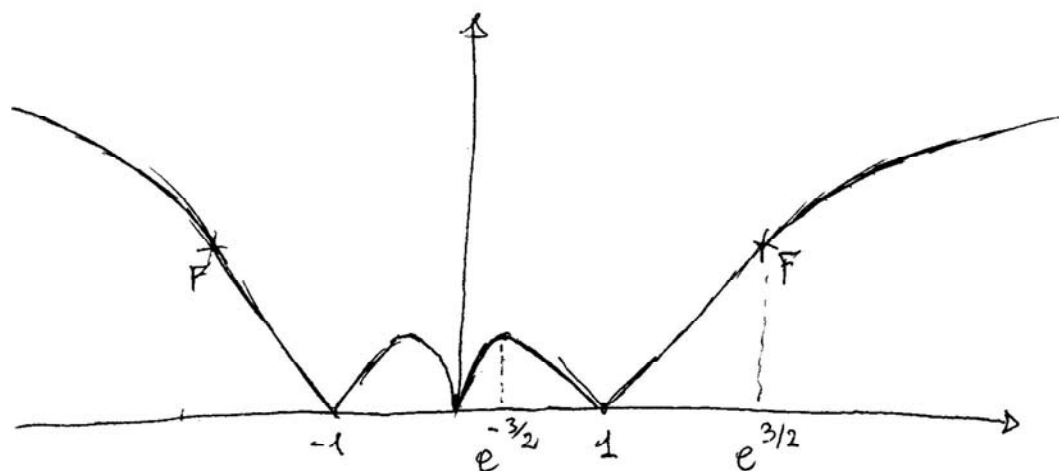
(già noto per la positività)

$$y'' = \begin{cases} D(x^{-1/3} + \frac{2}{3}(\lg x)x^{-1/3}) = D(x^{-1/3}(1 + \frac{2}{3}\lg x)) & \text{se } \lg x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ D(-x^{-1/3} + \frac{2}{3}(-\lg x)x^{-1/3}) = D(-x^{-1/3}(1 + 2\lg x)) & \text{se } \lg x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{se } x > 1 \quad y'' = -\frac{1}{3}x^{-4/3}(1 + \frac{2}{3}\lg x) + x^{-1/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^{-4/3}(-1 - \frac{2}{3}\lg x + 2)$$

Poiché $y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 - \frac{2}{3} \lg x > 0 \\ \frac{1}{3} < x < e^{3/2} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -\frac{2}{3} \lg x < 0 \\ \emptyset \end{cases}$ (2)

wha  f è convessa per $1 < x < \sqrt{e}$
 concava per $0 < x < 1$ e $x > \sqrt{e}$



2. La funzione f è continua in $]0, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{(\operatorname{sen} x + x)(\sqrt{1+x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \frac{\pi}{2}}{x + x + \frac{1}{2}x} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{5}}{x} = \frac{\pi}{5}$$

(perché per $x \rightarrow 0$ $\lg(x+1) \sim x$, $\operatorname{sen} x \sim x$ e $(1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x$)

perciò f è integrabile in senso classico in $]0, 1]$.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{(\operatorname{sen} x + x)(\sqrt{1+x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x+1) \cdot \frac{1}{x}}{x + \sqrt{x}} =$

(perché $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $\operatorname{sen} x + x \sim x$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \sqrt{x}$)
 per $x \rightarrow +\infty$:

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x+1)}{x^2 + x\sqrt{x}} = 0 \quad \text{per gli ordini, essendo il } \lg x \text{ infinito con. lenta e } x^2 + x\sqrt{x} \text{ di ord. 2, il limite è 0 con ordine } > 2 - \varepsilon, \text{ con } \varepsilon > 0$$

e quindi f è integrabile in s.i. in $[1, +\infty)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - e^{-x^2}}{\lg(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} - x^2}{x^2} = -\frac{3}{2}$

può per $x \rightarrow 0$: $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$, $1 - e^{-x^2} \sim x^2$, $\lg(x^2 + 1) \sim x^2$.

4. Posto $2^x = t \Rightarrow x = \lg_2 t \Rightarrow dx = \frac{1}{t \lg 2} dt$ l'integrale diventa

$$\int \frac{t^3 - 3t}{t^4 - 3t^3 + 2t^2} \cdot \frac{1}{t \lg 2} dt = \frac{1}{\lg 2} \int \frac{t^2 - 3}{t^2(t-1)(t-2)} dt =$$

$$= \frac{1}{\lg 2} \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t-2} \right) dt \quad \text{dove le costanti sono tali che}$$

$$At(t^2 - 3t + 2) + B(t^2 - 3t + 2) + Ct^2(t-2) + Dt^2(t-1) = t^2 - 3$$

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ -3A + B - 2C - D = 1 \\ 2A - 3B = 0 \\ 2B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{4} + C + D = 0 \\ \frac{27}{4} - \frac{3}{2} - 2C - D = 1 \\ A = \frac{3}{2} B = -\frac{9}{4} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{9}{4} \\ B = -\frac{3}{2} \\ C = 2 \\ D = \frac{1}{4} \end{cases}$$

quindi l'integrale diventa

$$\frac{1}{\lg 2} \left(-\frac{9}{4} \lg 2^x + \frac{3}{2} 2^{-x} + 2 \lg |2^x - 1| + \frac{1}{4} \lg |2^x - 2| \right) + C$$

5. Poiché $(\cos \frac{5}{9}\pi + i \sin \frac{5}{9}\pi)(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = \cos \frac{11}{9}\pi + i \sin \frac{11}{9}\pi$

l'equazione diventa

$$\omega = \sqrt[4]{32(\cos \frac{11}{9}\pi + i \sin \frac{11}{9}\pi)} = \left\{ 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{11}{9}\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{11}{9}\pi + 2k\pi}{4} \right) \right\}$$

$k = 0, 1, 2, 3$

e le soluzioni sono

$$\omega_0 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11}{36}\pi + i \sin \frac{11}{36}\pi \right)$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{29}{36}\pi + i \sin \frac{29}{36}\pi \right)$$

$$\omega_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{47}{36}\pi + i \sin \frac{47}{36}\pi \right) = -\omega_0$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{65}{36}\pi + i \sin \frac{65}{36}\pi \right) = -\omega_1$$