

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(18/06/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x^2 + x - 2)^2}{|x|}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)\sqrt{|\sin(x)|}}{e^{2x}(\cos(x) - 1 + x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos(x)}{(e^x - 1) \arcsin(x)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (2x - 1) \log(x^3 + 2x) dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 - 2iw - \left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{18}\right) \right) = 0.$$

Solcimento

1. $y = \sqrt[3]{\frac{(x^2+x-2)^2}{|x|}}$ ID: $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ID: $\mathbb{R}^*$

f non è né pari né dispari

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} +1 \\ -2 \end{matrix}$ (1,0) (-2,0)

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+x-2)^2}{|x|} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* - \{-2, 1\}$

Asintoti verticali

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt[3]{\frac{4}{0^+}} = +\infty$ $x=0$ A.V. completo

Asintoti orizzontali e/o obliqui

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2+x-2)^2}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{|x|^3} = +\infty$ $\nexists$ A. obliq.

trascurio infiniti più lent.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ux = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{(x^2+x-2)^2}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^4(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})^2}{x}} - x \right)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)^{2/3} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)^{2/3} - 1}{\frac{1}{x}} = -\frac{2}{3}$

perci $\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)^{2/3} - 1 \sim \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ per $x \rightarrow \pm \infty$ $y = x - \frac{2}{3}$
A2. ob. a dx

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ux = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^4(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})^2}{-x}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} - 1 \right)$
 $= +\frac{2}{3}$ $y = -x + \frac{2}{3}$ A2. ob. a sinist.

Studio della derivata I°

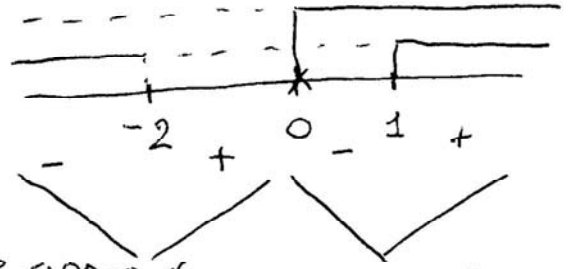
$y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\frac{(x^2+x-2)^2}{x^2}}} \cdot \frac{2(x^2+x-2)(2x+1)|x| - (x^2+x-2)^2 \frac{x}{|x|}}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$
 $x \neq -2, 1$

$$y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\frac{(x^2+x-2)}{x^2} \cdot (x^2+x-2)}} \cdot \frac{(x^2+x-2)(3x^3+x^2+2x)}{x^2|x|} \quad (2)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x^2+x-2)(3x^3+x^2+2x) > 0$$

$$x^2+x-2 > 0 \quad x < -2 \vee x > 1$$

$$x(3x^2+x+2) > 0 \quad x > 0$$



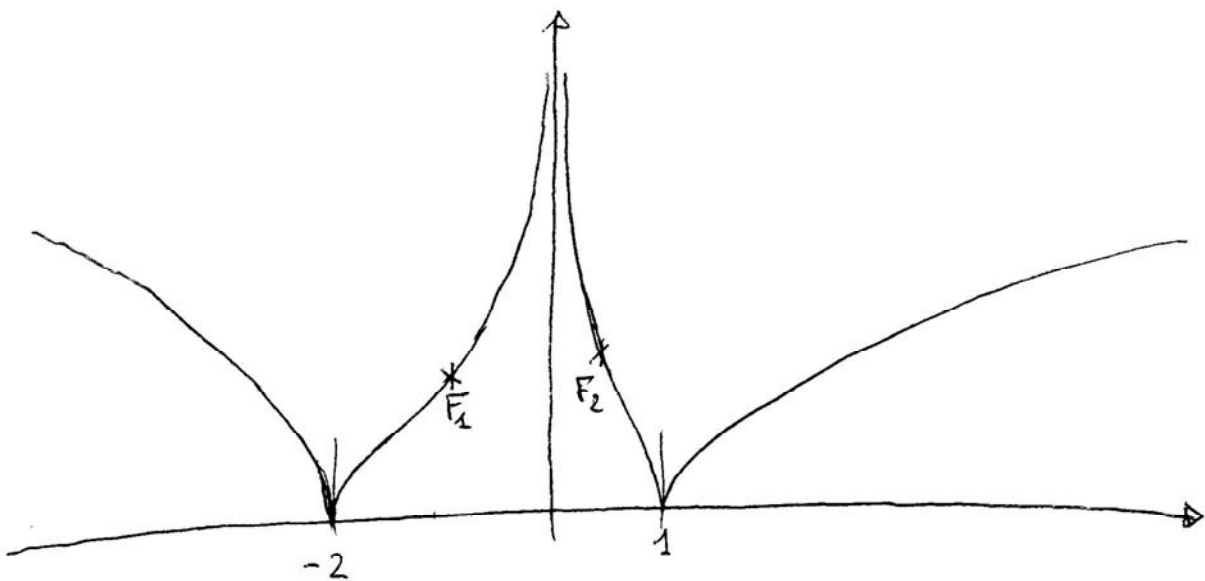
$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ sono pt. di min. rel. e assoluto come si poteva già dedurre dallo studio della positività

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} y' = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^3+x^2+2x}{3 \sqrt[3]{x^2+x-2} \cdot x^{1/3}|x|} = \frac{-24}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2+x+2}{3|x| \cdot x^{1/3} \sqrt[3]{x^2+x-2}} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$x = -2$, $x = 1$ pt. cuspidali per f

Per brevità, si omette lo studio della derivata 2^a (troppo lungo)



ci sono sicuramente due flessi tra -2 e 0 e tra 0 e 1.

(3)

2. f è continua in $]0, +\infty)$. Trovare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) \sqrt{|\sin x|}}{e^{2x} (\cos x - 1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot x^{1/2}}{e^{2x} \cdot (-\frac{x^2}{2} + x)} \downarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot x^{1/2}}{e^{2x} \cdot x} = 0$$

perché $e^x - 1 \sim x$, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$
 per $x \rightarrow 0$: $\sin x \sim x$

trascuro $\frac{x^2}{2}$ infinitesimo più veloce

Poi f è continua e limitata in $]0, 1]$, è integrabile in senso classico.

$$\text{Poi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1) \sqrt{|\sin x|}}{e^{2x} (\cos x - 1 + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}} = 0 \text{ con ord. grande}$$

trascuro gli infiniti più lenti

f è integrabile in s. i. in $[1, +\infty)$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{(e^x - 1) \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{1/2} - 1 + 1 - \cos x}{(e^x - 1) \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 1$$

perché per $x \rightarrow 0$ $(1+x^2)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $e^x - 1 \sim x$,
 $\arcsin x \sim x$.

$$4. \int (2x-1) \lg(x^3+2x) dx = \int (x^2-x) \lg(x^3+2x) dx = \text{integrando per parti}$$

$$= (x^2-x) \lg(x^3+2x) - \int \frac{x^2-x}{x^3+2x} (3x^2+2) dx = (x^2-x) \lg(x^3+2x) - \int \frac{3x^3-3x^2+2x-2}{x^2+2} dx$$

$$\text{Poi} \frac{3x^3-3x^2+2x-2}{x^2+2} \quad \begin{array}{r} \overline{3x^3 + + 6x} \\ -3x^2 - 4x - 2 \\ \hline -3x^2 - 6 \\ \hline -4x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ha: } \int (3x-3 + \frac{-4x+4}{x^2+2}) dx = \\ \frac{3x^2}{2} - 3x - 2 \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{4}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2}(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + 1} \\ = \frac{3}{2}x^2 - 3x - 2 \lg(x^2+2) + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{array}$$

$$5. \text{Poi} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right) \left(\cos \frac{7}{18} \pi + i \sin \frac{7}{18} \pi \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

l'eq. diventa

$$\omega^2 - 2i\omega - i = 0 \quad \omega_{1,2} = i \pm \sqrt{-1+i} = i \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)$$

$$= i \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{2} \right) | k=0,1 \} = \pm \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} + i \left(1 \pm \sqrt{2} \sin \frac{3}{8} \pi \right).$$