

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(03/04/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x| \sqrt[3]{\log^2(|x|)}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{(e^x - 1) \arctang(x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1 - \log(x^2 + 1)}{e^{x^2} - 1}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2^{2x} - 3}{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} + 2^{x+1}} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^3 - 6 \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) \left(\cos \left(\frac{13\pi}{8} \right) + i \text{sen} \left(\frac{13\pi}{8} \right) \right) = 0.$$

Svolgimento

1. ID $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ID = $\mathbb{R}^*$ $f(-x) = f(x) \forall x \neq 0$

Poiché f è pari, la studiamo per $x > 0$ e poi ne ribaltiamo il grafico rispetto all'asse y .

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\lg^2 x} > 0 \Leftrightarrow \lg^2 x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x = 0 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Asintoti Verticali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt[3]{\lg^2 x} = 0 \cdot (+\infty) = 0 \quad \text{per gli ordini perde il logaritmo}$$

per $x \rightarrow 0^+$ è infinito con. piccolo

∇ as. Verticali, in $x=0$ f è prolungabile per continuità

Asintoti orizzontali e obliqui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[3]{\lg^2 x} = +\infty \quad \nexists \text{ as. orizz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\lg^2 x}}{x} = +\infty \quad \nexists \text{ as. obliqui}$$

Studio della derivata prima

$$y' = \sqrt[3]{\lg^2 x} + \frac{1}{\sqrt[3]{\lg^4 x}} \cdot \frac{2 \lg x}{x} = \sqrt[3]{\lg^2 x} + \frac{2}{3 \sqrt[3]{\lg x}} = \frac{3 \lg x + 2}{3 \sqrt[3]{\lg x}} \quad \forall x \neq 1$$

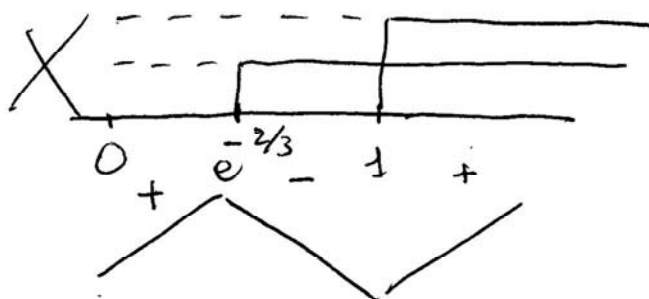
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \frac{-\infty}{-\infty} = +\infty \quad \text{per gli ordini}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y' = \frac{2}{0^\pm} = \pm \infty \quad \text{Poiché } y'_-(1) = -\infty \quad x=1 \text{ pto cuspidale}$$

$$y'_+(1) = +\infty$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{3 \lg x + 2}{\sqrt[3]{\lg x}} > 0 \Rightarrow N > 0 \quad \lg x > -\frac{2}{3} \quad x > e^{-2/3}$$

$$D > 0 \quad \lg x > 0 \quad x > 1$$

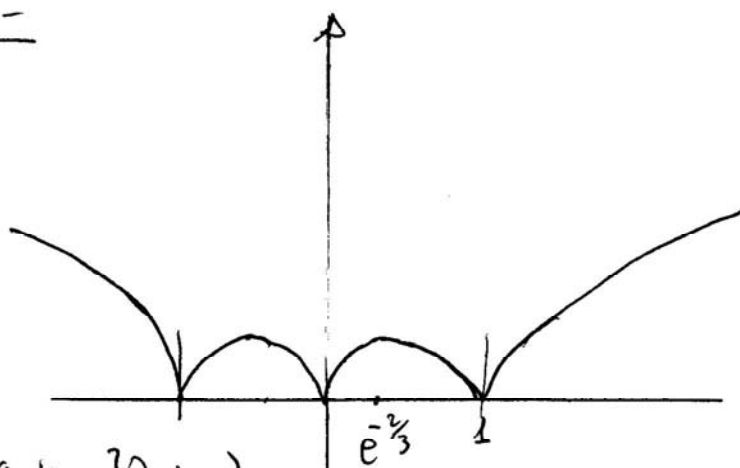
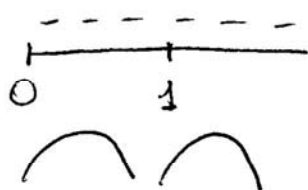


$$\begin{cases} x = e^{-2/3} & \text{max rel.} \\ y = e^{-2/3} \cdot e^{-4/3} = e^{-10/9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 & \text{min rel. e assoluto} \\ y = 0 & \text{(già noto per la positività)} \end{cases}$$

$$y'' = \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{x} \sqrt[3]{\lg x} - (3 \lg x + 2) \frac{1}{3 \sqrt[3]{\lg^2 x}} \cdot \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\lg^2 x}} = \frac{1}{3} \frac{\cancel{3 \lg x} - \cancel{3 \lg x} - 2}{3x \sqrt[3]{\lg^4 x}} = \frac{-2}{9x \sqrt[3]{\lg^4 x}}$$

$$y'' > 0 \quad x \in \emptyset$$



2. La funzione $f(x)$ è continua in $]0, +\infty)$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{(e^x - 1) \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \cdot x} = +\infty \text{ con ord. 1}$$

(poiché $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$ per $x \rightarrow 0^+$)

e dunque f non è integrabile in $]0, 1]$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{(e^x - 1) \operatorname{arctg} x} = 0$ con ord. molto grande, segue che f è integ. in $[1, +\infty)$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2 - 1 - \lg(x^2 + 1)}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4 - x^2}{x^2} = -1$$

poiché $\cos x^2 - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $\lg(x^2 + 1) \sim x^2$, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$.

4. Posto $2^x = t \Rightarrow x = \lg_2 t \Rightarrow dx = \frac{1}{t \lg 2} dt$ e' integrale di Jank

$$\int \frac{t^2 - 3}{t^3 - 3 \cdot t^2 + 2t} \frac{1}{t \lg 2} dt = \frac{1}{\lg 2} \int \frac{t^2 - 3}{t^2(t^2 - 3t + 2)} dt =$$

$$\frac{1}{\lg 2} \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t-2} \right) dt \quad \text{dove } A, B, C, D \text{ sono tali che}$$

$$A t(t-1)(t-2) + B(t-1)(t-2) + C t^2(t-2) + D t^2(t-1) = t^2 - 3$$

$$\text{Per } t=0 \Rightarrow 2B = -3 \Rightarrow B = -\frac{3}{2} \quad \text{per } t=2 \Rightarrow 4D = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$$t=1 \Rightarrow -C = -2 \Rightarrow C = 2$$

$$At(t^2-3t+2) - \frac{3}{2}(t^2-3t+2) + 2t^2(t-2) + \frac{1}{4}t^2(t-1) = t^2-3 \quad (3)$$

$$A(t^3 - 3t^2 + 2t) - \frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{2}t - 3 + 2t^3 - 4t^2 + \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{4}t^2 = t^2 - 3$$

$$\begin{cases} A + 2 + \frac{1}{4} = 0 \\ -3A - \frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{4} = 1 \\ 2A + \frac{9}{2} = 0 \end{cases} \quad A = -\frac{9}{4}$$

L'integrale diventa: $\frac{1}{\log 2} \left[-\frac{9}{4} \log |t| + \frac{3}{2} \frac{1}{t} + 2 \log |t-1| + \frac{1}{4} \log |t-2| \right] + c$

$$= \frac{1}{\log 2} \left[-\frac{9}{4} \log 2^x + \frac{3}{2} \cdot 2^{-x} + 2 \log |2^x - 1| + \frac{1}{4} \log |2^x - 2| \right] + c.$$

5. Poiché $(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}) = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$

l'equazione diventa

$$w = \sqrt[3]{6(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})} = \left\{ \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \mid k=0,1,2 \right\}$$

che ha soluzioni

$$w_0 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt[3]{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{6} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$$