

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(18/02/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x^2 - 1| - \log(|1 - |x^2 - 1||)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(x+1) \operatorname{arctang}(x)}{e^x - 1}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1+x}}{\operatorname{arcsen}(x)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{(\log(x))^2 + 4}{x(\log(x))^3 - 8x(\log(x))^2 + 15x \log(x)} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 - 2i\bar{w} + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) = 0.$$

$$1. \text{ ID: } 1 - |x^2 - 1| \neq 0 \quad |x^2 - 1| \neq 2 \quad x^2 - 1 \neq \pm 1 \quad x^2 \neq 0 \wedge x^2 \neq 2$$

$$\text{ID} = \mathbb{R} - \{0, \pm\sqrt{2}\}$$

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{ID} \quad f \text{ pari}$$

$$f(x) > 0 \quad |x^2 - 1| > \lg(1 - |x^2 - 1|) \quad \text{volendo si potrebbe studiare la diseq.}$$

$$f(x) = 0 \quad |x^2 - 1| = \lg(1 - |x^2 - 1|)$$

con il metodo grafico, ma evitiamo perché lo studio della positività non è indispensabile

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} |x^2 - 1| - \lg|1 - |x^2 - 1|| = 1 + \infty = +\infty \quad x = 0 \quad \text{As. Verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} f(x) = +\infty \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \text{As. Verticali}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [|x^2 - 1| - \lg|1 - |x^2 - 1||] = +\infty - \infty = +\infty \quad \text{As. orizz.}$$

(posso trascurare il $\lg|1 - |x^2 - 1||$ che è di ordine piccolo)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} - \frac{\lg|1 - |x^2 - 1||}{x} = +\infty \quad \text{As. obliqua}$$

Perché f è pari, i limiti a $-\infty$ sono uguali a quelli a $+\infty$.

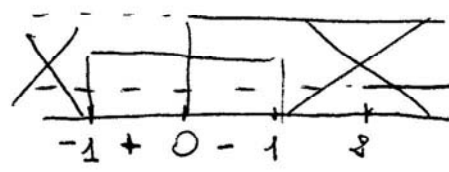
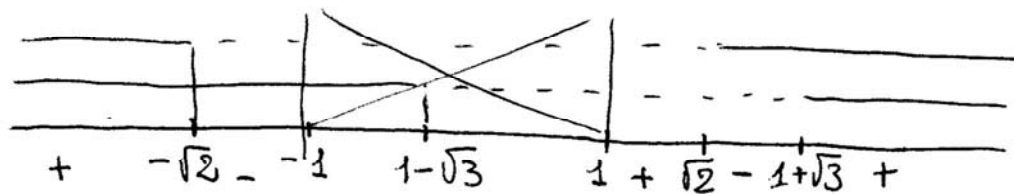
$$y' = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} - \frac{-\frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|} \cdot 2x}{1 - |x^2 - 1|} = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{1 - x^2 + 1} & \text{se } x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1 \\ 1 - \frac{2x}{1 + x^2 - 1} & \text{se } x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ 1 + \frac{2x}{2 - x^2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{2x}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

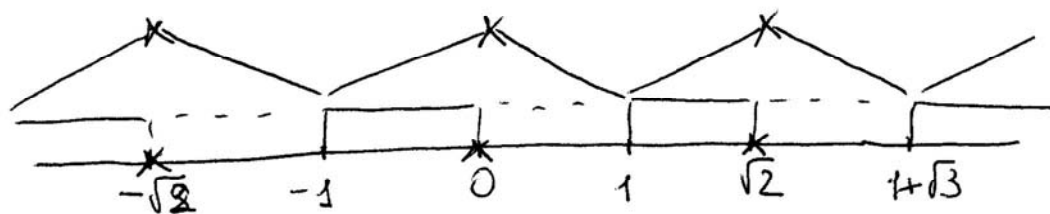
$$\begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ \frac{-x^2 + 2x + 2}{2 - x^2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{x - 2}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{x - 2}{x} > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 2 > 0 \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad x < 1 - \sqrt{3} \vee x > 1 + \sqrt{3}$$

$$x^2 > 2 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$$



$$y' > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 0 \vee 1 < x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{3} + 1$$



$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ pti de minimo}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 3 - \lg 2 \end{cases} \text{ pto de minimo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{2x}{2-x^2} = 1 + 2 = 3$$

$$\text{Por lo tanto } f'_+(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{x} = -1$$

$$f'_-(1) = -1 \Rightarrow x = 1 \text{ pto anguloso}$$

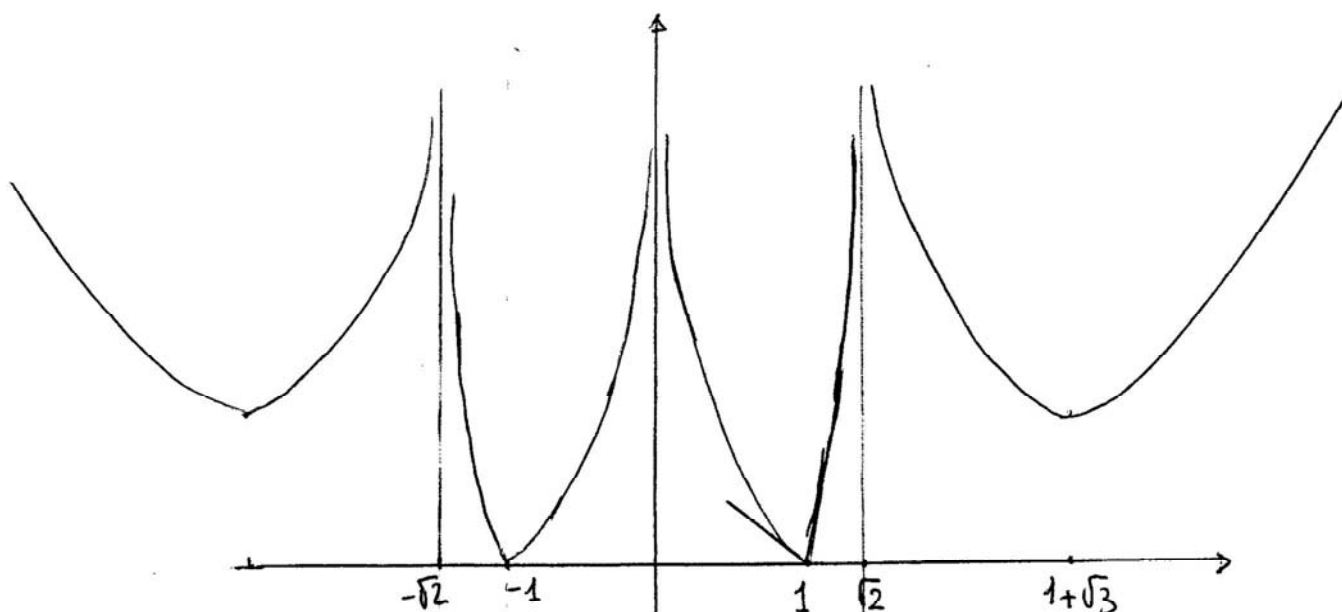
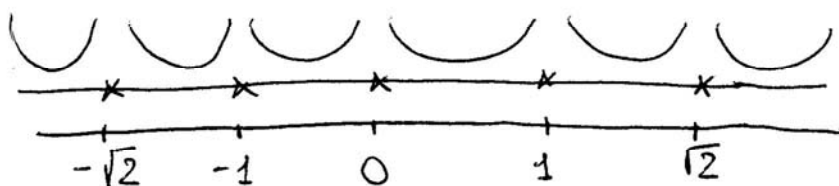
analogamente $x = -1$ pto anguloso

$$\text{se } x < -1 \vee x > 1$$

$$\text{se } -1 < x < 1$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{(-2x+2)(2-x^2) - (-x^2+2x+2)(-2x)}{(2-x^2)^2} \\ \frac{2}{x^2} \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ 2x^2 + 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \forall x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \text{ID}(y')$$



A posteriori, se deduce de $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \text{ID} - \{\pm 1\}$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

2. Poiché f è cont. in $]0,1]$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(x+1) \operatorname{arctg} x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x} = 0$

f è integrabile in $]0,1]$ in s.i.

$\lg(1+x) \approx x, \operatorname{arctg} x \approx x, e^x - 1 \approx x$

Poiché f è continua in $[1, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x+1) \operatorname{arctg} x}{e^x - 1} = 0$ con ord. molto grande
 $\Rightarrow f$ è integrabile in $[1, +\infty)$ in s.i. equindi $\alpha > 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+x}}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - (1+x)^{1/2}}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}{x} = -\frac{1}{2}$

poiché $\cos x - 1 \approx -\frac{1}{2}x^2, (1+x)^{1/2} - 1 \approx \frac{1}{2}x, \arcsin x \approx x$.

4. Posto $\lg x = t$ è l'integrale di Jensen

$$\int \frac{t^2 + 4}{t^3 - 8t^2 + 15t} dt = \int \frac{t^2 + 4}{t(t-3)(t-5)} dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-5} \right) dt =$$

$$\begin{aligned} A(t-3)(t-5) + Bt(t-5) + Ct(t-3) &= t^2 + 4 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 15A = 4 & (\text{per } t=0) \\ 3 \cdot (-2)B = 13 & (\text{per } t=3) \\ 2 \cdot 2 \cdot C = 29 & (\text{per } t=5) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{15} \\ B = -\frac{13}{6} \\ C = \frac{29}{4} \end{cases} \\ &= \int \left(\frac{4}{15t} - \frac{13}{6(t-3)} + \frac{29}{4(t-5)} \right) dt = \\ &= \frac{4}{15} \lg |\lg x| - \frac{13}{6} \lg |\lg x - 3| + \frac{29}{4} \lg |\lg x - 5| + c. \end{aligned}$$

5. Poiché $(\cos \frac{3}{10}\pi + i \sin \frac{3}{10}\pi)(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$
 è l'equazione di Jensen

$$\omega^2 - 2i\bar{\omega} + i^2 = 0 \quad \omega^2 - 2i\bar{\omega} - 1 = 0$$

Posto $\omega = x + iy \Rightarrow \omega^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

L'equazione di Jensen $x^2 - y^2 + 2xyi - 2i(x - iy) - 1 = 0$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0 \\ 2xy - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 1 - 2 - 1 = 0 \\ y = 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

le soluzioni sono $z_1 = -i, z_{2,3} = \pm 2 + i$.