

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(01/02/2013)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)^2}{|x|}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(x\sqrt{x} + 1)}{(e^x - 1) \arctang(x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - \log(\cos(x))}{\sqrt{1+x^2} - 1}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (x - 5) \log(x^3 - 2x^2) dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 - 2iw + \frac{1+i}{1-i} = 0.$$

$$1. ID = \mathbb{R}^+$$

$$\text{Poiché } f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID \quad f \text{ è pari}$$

Studiamo f per $x > 0$ e poi esaltato rispetto asse y

$$\text{Per } x > 0 \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x}} \quad f \geq 0 \text{ per } x > 0 \quad f = 0 \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad x \neq 0 \text{ Az. vert. destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{As. obl.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad (\text{eventuale coeff. angolare})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^4(1-\frac{1}{x^2})^2}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-\frac{1}{x^2})^{2/3} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ asintoto obliquo a destra

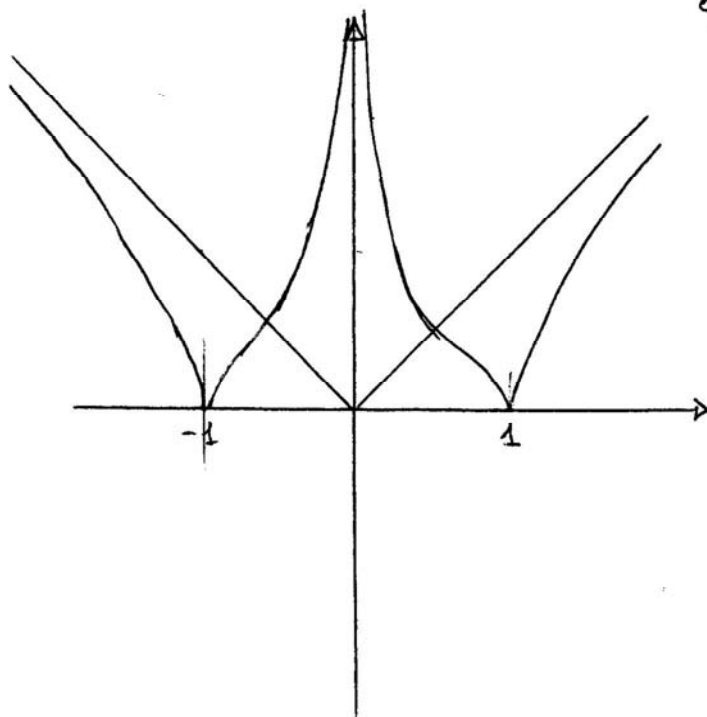
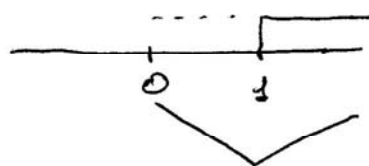
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \text{ se } x \rightarrow 0$$

$$y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2}}} \cdot \frac{2(x^2-1) \cdot 2x^3 - (x^2-1)^2}{x^2} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x^3}{(x^2-1)^4}} \cdot \frac{(x^2-1)(4x^2-x^2+1)}{x^2} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2-1}} \cdot \frac{3x^2+1}{x^2}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{\pm 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} \cdot 4 = +\infty \quad x = 1 \text{ pto cuspidale}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$



Non studiamo il segno di y'' perché troppo lungo. Sicuramente ci sarà un flesso tra 0 e 1 perché la funzione vicino 0 è rivolta verso l'alto e vicino 1 è rivolta verso il basso.

2. Poiché f è continua in $]0,1]$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(x\sqrt{x}+1)}{(e^x-1)\operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{con ord. } \frac{1}{2} < 1$$

$$\lg(1+x\sqrt{x}) \sim x\sqrt{x}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x$$

$\Rightarrow f$ è integrabile in s.i. in $]0,1]$.

Poiché f è continua in $[1, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x\sqrt{x}+1)}{(e^x-1)\operatorname{arctg} x} = 0 \quad \text{con ord. grande e quindi } > \alpha > 1$$

(essendo $\lg(x\sqrt{x}+1)$ un infinito molto lento
e e^x infinito molto veloce)

$\Rightarrow f$ è integrabile in s.i. in $[1, +\infty)$.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \lg(\cos x)}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 3$$

$$\text{essendo } \operatorname{sen} x \approx x \quad \lg(\cos x) = \lg(1 + \cos x - 1) \sim -1 + \cos x \approx -\frac{1}{2}x^2$$

$$\sqrt{1+x^2}-1 = (1+x^2)^{1/2}-1 \approx \frac{1}{2}x^2$$

$$4. \int (x-5) \lg(x^3-2x^2) dx = \frac{(x-5)^2}{2} \lg(x^3-2x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{(x-5)^2}{x^3-2x^2} (3x^2-4x) dx.$$

$$\text{Poiché } \frac{(x-5)^2}{x^2(x-2)} \cdot (3x-4) = \frac{3x^3-34x^2+115x-100}{x^2-2x} = 3x-28 + \frac{59x-100}{x^2-2x}, \text{ si ha}$$

$$\int \frac{(x-5)^2}{x^3-2x^2} (3x^2-4x) dx = \int (3x-28) dx + \int \frac{59x-100}{x^2-2x} dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 28x + \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \right) dx = \frac{3}{2}x^2 - 28x + 59 \lg|x| + 9 \lg|x-2| + C$$

$$A \text{ e } B \Rightarrow \begin{cases} A+B=59 & B=9 \\ -2A=-100 & A=50 \end{cases}$$

$$5. \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i \Rightarrow \text{l'equazione di Senke } \omega^2-2i\omega+i=0$$

$$\omega_{1,2} = i + \sqrt{i^2-i} = i + \sqrt{-1-i} = i + \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) =$$

$$= i + \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right), \quad k=0,1$$

$$= i \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) = \pm \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} + i (1 \pm \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}).$$