

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(18/09/2012)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| x e^{\frac{1}{x^2-4}} \right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x) - \sqrt{x+1}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x^2}}}{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{e^{3x} + 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right) w + 1 = 0.$$

Svolgimento

1. Studiamo la funzione $y = x e^{\frac{1}{x^2-4}}$ e poi ne prendiamo il valore assoluto.

$$ID = \mathbb{R} - \{\pm 2\} \quad h(x) = -x e^{\frac{1}{x^2-4}} = -h(x) \quad h \text{ dispari}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \quad (0,0) \text{ unica intersezione}$$

$$y > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x e^{\frac{1}{x^2-4}} = \pm \infty \cdot 1 = \pm \infty \quad \text{A as. oriz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{\frac{1}{x^2-4}} = 1 \quad (u)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x (e^{\frac{1}{x^2-4}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot \frac{1}{x^2-4} = 0 \quad (q) \quad y = x \text{ A2. ob. } a \pm \infty$$

$$e^y - 1 \approx y \text{ se } y \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{+\infty} = +\infty \quad x=2 \text{ As. Vert. solo a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x e^{\frac{1}{x^2-4}} = e^{-\infty} = 0$$

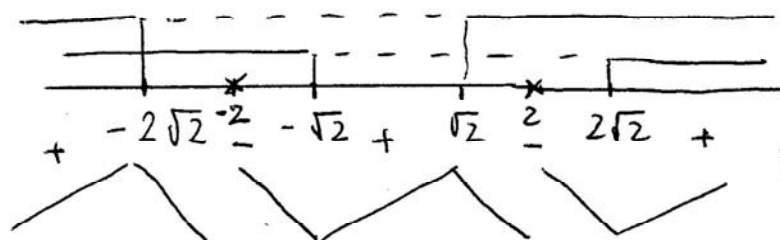
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = 0 \quad x=-2 \text{ As. Vert. solo a sinistra}$$

$$y' = e^{\frac{1}{x^2-4}} \left(1 + x \frac{-2x}{(x^2-4)^2} \right) = e^{\frac{1}{x^2-4}} \left(\frac{(x^2-4)^2 - 2x^2}{(x^2-4)^2} \right) \quad \forall x \in ID(h)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x^2-4)^2 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow (x^2-4-\sqrt{2}x)(x^2-4+\sqrt{2}x) > 0$$

$$x^2 - \sqrt{2}x - 4 > 0 \quad x_{1/2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x < -\sqrt{2} \vee \\ x > 2\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$x^2 + \sqrt{2}x - 4 > 0 \quad x_{1/2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -2\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x < -2\sqrt{2} \vee \\ x > \sqrt{2} \end{matrix}$$



$$M \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} e^{\frac{1}{x^2-4}} \end{cases} \quad M \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = +\sqrt{2} e^{\frac{1}{x^2-4}} \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} e^{\frac{1}{x^2-4}} \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} e^{\frac{1}{x^2-4}} \end{cases}$$

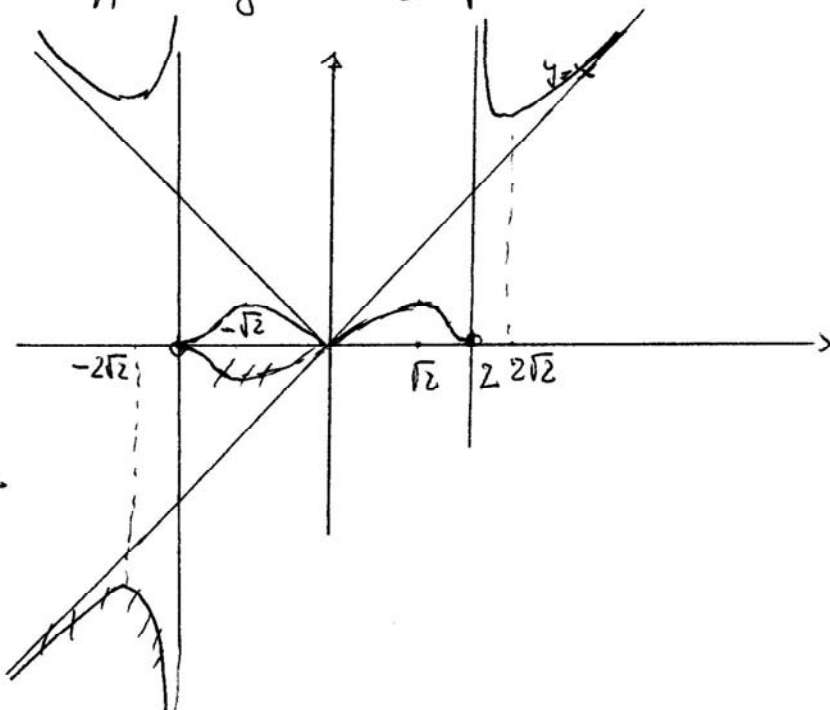
Non studio la derivata $\hat{=}$ perde troppo tempo: osservo però che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = e^{-\frac{1}{4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y' = 0$$

Per $x \geq 0$ $f(x) = |h(x)| = h(x)$

per $x < 0$ $f(x) = -h(x)$

e quindi $f(x)$ è pari, sempre
positiva e ha 2 flessi in $x = \pm \alpha$
con $\sqrt{2} < \alpha < 2$.



2. Poiché la funzione è continua e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x} = -\infty$

essendo $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $1 - \sqrt{x+1} \sim -\frac{1}{2}x$

$= -\infty$
con ord. 1

f non è integrabile in s.i. in $[0, 1]$.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cos x - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$ con ord. $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

(trascuro $\cos x$ e limito app a $\sqrt{x+1}$)

f non è integrabile in $[1, +\infty)$.

3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x^2}}}{\sin \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x^2} \cdot x^3 = \pm\infty$

poiché $\cos \frac{1}{x} - 1 \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$, $1 - e^{\frac{1}{x^2}} \sim -(-\frac{1}{x^2})$, $\sin \frac{1}{x^3} \sim \frac{1}{x^3}$

4. Posto $e^{3x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{3} \lg_3 t$, $dx = \frac{1}{3} \frac{1}{t \lg 3}$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{dx}{e^{3x} + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\lg 3} dt = \frac{1}{3 \lg 3} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{3 \lg 3} (\lg |t+1| - \lg |t|) + C$$

$$= \frac{1}{3 \lg 3} \lg \left(\frac{e^{3x} + 1}{e^{3x}} \right) + C.$$

5. Dopo aver effettuato il prodotto $(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi) = -1$ si ha
 $w^3 + w + 1 = 0 \Rightarrow w_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$