

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(04/09/2012)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsen\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x - \sqrt{1+x}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - e^x) - \log(x+1)}{\sin(\arctang(x))}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 - 1 - \sqrt[3]{-1} = 0.$$

Svolgimento

$$1. \quad -1 \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 3x \leq 1+x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1 \geq 0 \\ x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x \leq \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$ID = \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ y = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-3x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

f dispari

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin \frac{3x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{3x}{x^2+1} = \arcsin 0 = 0 \quad y = 0 \quad A_2.$$

02122.0000

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot 3 \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot 3 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad ID(y') = ID(y) - \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^-} y' = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^-} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot 3 \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = +\infty \cdot 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^2} = -\infty$$

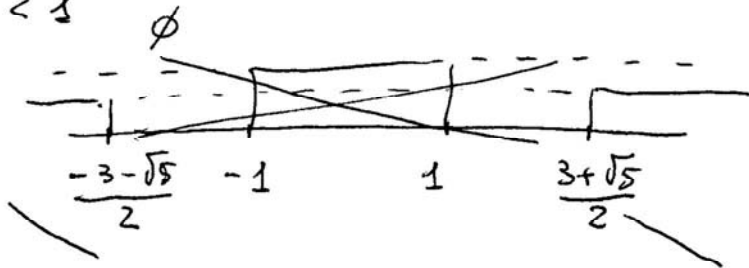
$$\text{Analogamente } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^+} y' = -\infty$$

gli estremi del dominio sono punti a tangente verticale

$$y' > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \in ID \end{cases}$$

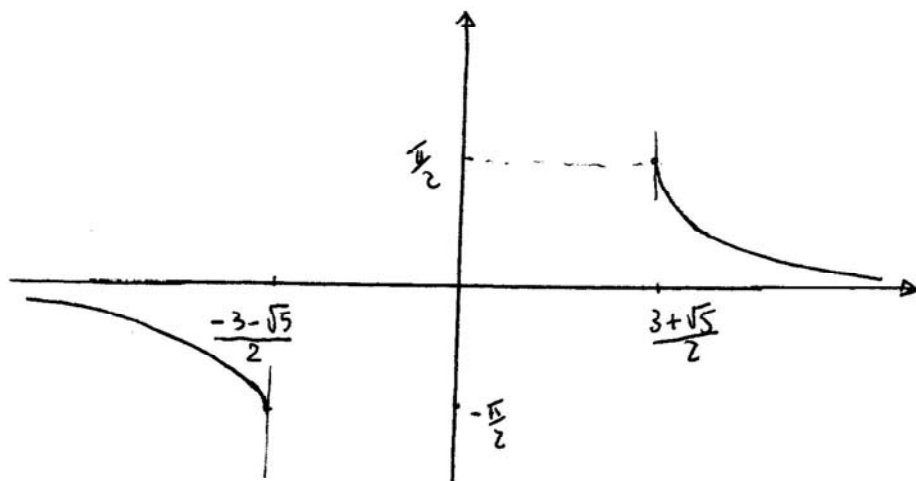
f è decrescente in $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$

e in $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.



Non studio il segno della derivata seconda perché troppo lungo.

Sì, intuisce comunque che in $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ la funzione è sempre convessa perché parte dal pto $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ con tangente verticale (e quindi risolve verso l'alto) e tende asintoticamente all'0 (e quindi risolve verso l'alto).



2. Poiché f è continua in $]0,1[$ e per $x \rightarrow 0$: $e^x - 1 \simeq x$, $(1+x)^{1/2} - 1 \simeq \frac{1}{2}x$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1 + 1 - (1+x)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$
 con ordine 1 $\Rightarrow f$ non è integrabile ma i. in $]0,1[$.

Poiché f è continua in $[1, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - \sqrt{1+x}} = 0$ con ordine
 e quindi $\alpha > 1 \Rightarrow f$ è integ. in s.l. in $[1, +\infty)$.
 (Si ricorda che al denominatore $e^x \rightarrow +\infty$ molto velocemente, mentre $\sqrt{1+x} \rightarrow +\infty$ con ordine $1/2$ e quindi si può trascurare).

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x - e^x) - \lg(x+1)}{\sin(\operatorname{arctg} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2x}{x} = -2$

Poiché $\sin(\cos x - e^x) \simeq \cos x - e^x = \cos x - 1 + 1 - e^x \simeq -\frac{1}{2}x^2 - x \simeq x$
 $\lg(x+1) \simeq x$
 $\sin(\operatorname{arctg} x) \simeq \operatorname{arctg} x \simeq x$
 per $x \rightarrow 0$

4. Poiché $\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x + 6} = \frac{x^2 + 2x + 3}{2}$ e integrale di Riemann
 $\frac{2x^2 + 4x + 6}{-5x - 5}$

$$I = \int \left(2 - \frac{5(x+1)}{x^2 + 2x + 3} \right) dx = 2x - 5 \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx.$$

$$\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \lg(x^2 + 2x + 3) + C \text{ e quindi}$$

$$I = 2x - \frac{5}{2} \lg(x^2 + 2x + 3) + C.$$

5. Poiché $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos \pi + i \sin \pi} = \left\{ \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, k=0,1,2 \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1 \right\}$ si ha
 $\omega^2 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 0$; $\omega^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; $\omega^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Perché

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} &= \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \sqrt[4]{3} \sqrt{\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi} = \\ &= \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\frac{11}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{11}{6} + 2k\pi}{2} \right) = \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \\ &\quad k=0,1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} &= \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt[4]{3} \sqrt{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} \right) \\ &= \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ &\quad k=0,1\end{aligned}$$

l'equazione ha le seguenti radici

$z=0$ doppia

$$z = \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \quad z = \pm \sqrt[4]{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$