

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(02/07/2012)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{\log(|x-1|)}{x-1} \right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{e^x - 1}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{(e^x - 1) \sin^2(x)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - 2} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

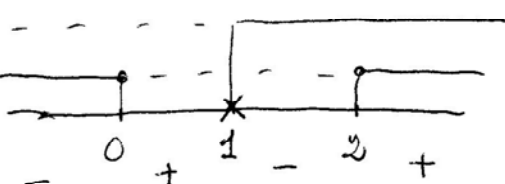
$$w^2 - (2+i)w + 3i - 3 = 0.$$

1. $f(x) = \left| \frac{\lg |x-1|}{x-1} \right|$ ID $\begin{cases} |x-1| > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x-1 \neq 0 \quad x \neq 1$

Poiché $f(x) = \begin{cases} \frac{\lg |x-1|}{x-1} & \text{se } \frac{\lg |x-1|}{x-1} \geq 0 \\ -\frac{\lg |x-1|}{x-1} & \text{se } \frac{\lg |x-1|}{x-1} < 0 \end{cases}$

basta studiare $g(x) = \frac{\lg |x-1|}{x-1}$ e poi farne il valore assoluto.

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg |x-1|}{x-1} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad \lg |x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq 1 \Rightarrow$
 $x-1 \geq 1 \vee x-1 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq 0$
 $D > 0 \quad x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$



$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \vee x \geq 2$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

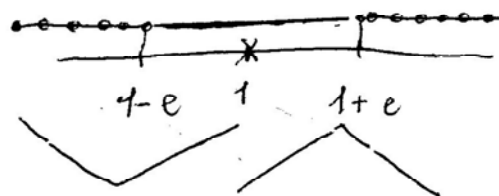
$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} g(x) = \mp \infty \quad x = 1 \text{ A.V.}$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = 0 \quad (\text{per } g \text{ è } o(1/x)) \quad y = 0 \text{ A. } 0 \text{ e } \pm \infty.$

$g' = \frac{\frac{1}{x-1}(x-1) - \lg |x-1|}{(x-1)^2} = \frac{1 - \lg |x-1|}{(x-1)^2} \quad \text{ID}(g') = \text{ID}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$

$g' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \lg |x-1| \geq 0 \Leftrightarrow \lg |x-1| \leq 1 \Rightarrow |x-1| \leq e$
 $\Rightarrow 1-e \leq x \leq 1+e$

$\begin{cases} x = 1-e & \text{min.} \\ y = -\frac{1}{e} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1+e & \text{Max} \\ y = \frac{1}{e} \end{cases}$



$y'' = \frac{-\frac{1}{x-1}(x-1)^2 + (\lg |x-1|)^2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(2\lg |x-1| - 1)}{(x-1)^4}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow (x-1)(2\lg |x-1| - 1) > 0 \quad x > 1$

$\lg |x-1| > \frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| > e^{1/2} \Rightarrow x < 1-e^{1/2} \vee x > 1+e^{1/2}$

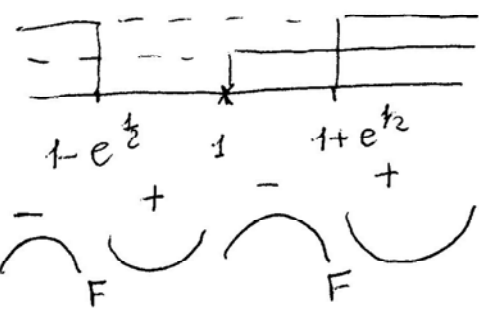
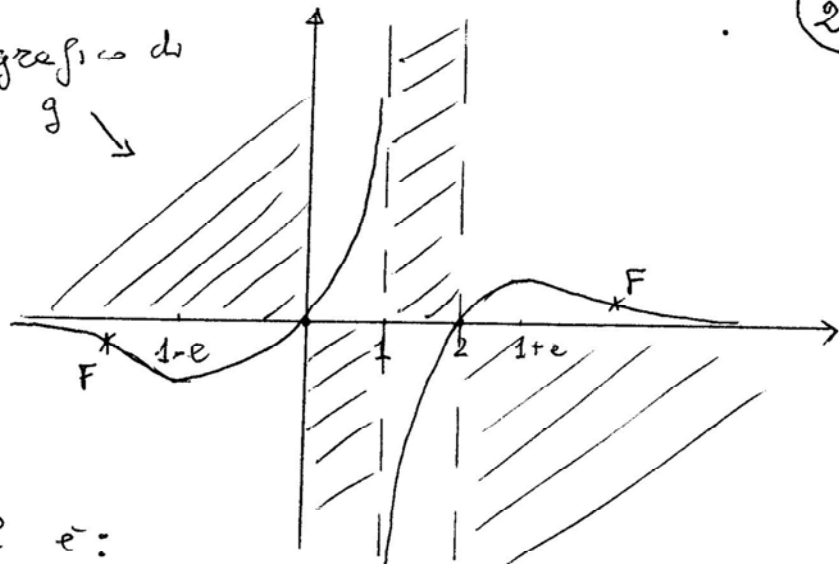
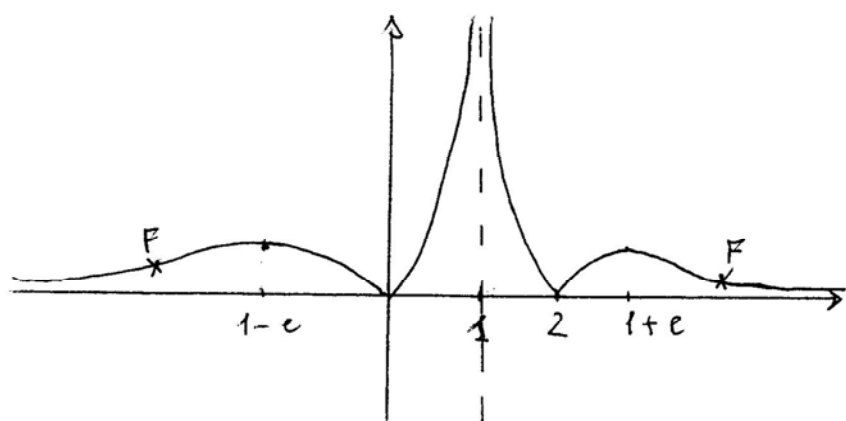


grafico di
g



Perché $f \equiv |g|$ il grafico di f è:



Si osserva che $x=0$ e $x=2$ sono pti angolose per f perché

$$f'_+(0) = g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1$$

$$f'_-(0) = -f'_+(0) = -1$$

(idem per $x=2$)

2. f è integrabile in $[0,1]$ perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

f è integrabile in $[1, +\infty)$ perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(\cos x - 1)}_{f. \text{ limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^x - 1}}_{\rightarrow 0 \text{ con ord. } \geq \alpha \forall \alpha > 0} = 0 \text{ con ord. } \geq \alpha \forall \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{(e^x - 1) \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - (1+x^2)^{1/2}}{(e^x - 1) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2}{x \cdot x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} \neq \text{perché} \lim_{x \rightarrow 0 \pm} -\frac{1}{x} = \mp \infty \end{aligned}$$

Si ricorda che $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ $(1+x^2)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$
per $x \rightarrow 0$ $e^x - 1 \sim x$ $\sin^2 x \sim x^2$

4. Posto $\sqrt[6]{x} = t$ si ha $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x} = t^2, x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$ (3)

$$\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} dx = \int \frac{t}{t^2-2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^6}{t^2-2} dt$$

$$= 6 \int (t^4 + 2t^2 + 4 + \frac{8}{t^2-2}) dt$$

$$= 6 \left[\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + 4t + \frac{8}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| \right] + C =$$

$$\begin{array}{r} t^6 \\ t^6 - 2t^4 \\ \hline 2t^4 \\ 2t^4 - 4t^2 \\ \hline 4t^2 \\ 4t^2 - 8 \\ \hline 8 \end{array}$$

Si vuole che

$$\frac{1}{t^2-2} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} = \frac{(A+B)t + \sqrt{2}A - \sqrt{2}B}{t^2-2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ \sqrt{2}A - \sqrt{2}B = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = -B = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2-2} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{2}{3} \sqrt[6]{x^3} + 4\sqrt[6]{x} + \frac{4}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt[6]{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt{2}} \right| \right) + C.$$

5. $\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 12i + 12}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{15-8i}}{2}$

$\bar{\theta}$ e $\cos \bar{\theta} = \frac{15}{17}$ $\sin \bar{\theta} = -\frac{8}{17}$

$$\sqrt{15-8i} = \sqrt{17}(\cos \bar{\theta} + i \sin \bar{\theta}) = \left\{ \sqrt{17} \left(\cos \frac{\bar{\theta} + 2K\pi}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta} + 2K\pi}{2} \right) \mid K=0,1 \right\}$$

$$= \pm \sqrt{17} \left(\cos \frac{\bar{\theta}}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \right) = \pm \sqrt{17} \left(\frac{1+\cos \bar{\theta}}{2} + i \frac{1-\cos \bar{\theta}}{2} \right)$$

$$= \pm \sqrt{17} \left(\frac{1+\frac{15}{17}}{2} + i \frac{1-\frac{15}{17}}{2} \right).$$

Segue che

$$\omega_{\frac{1}{2}} = 2+i \pm \sqrt{17} \left(\frac{16}{17} + i \frac{1}{17} \right) = 2 \pm \frac{\sqrt{17}}{17} 16 + i \left(1 \pm \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$$

sono le soluzioni dell'equazione assegnata.