

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(20/02/2012)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = x(\log(|x|))^{\frac{2}{3}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$\frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \log(x) - e^x + e}{(\sqrt{x} - 1)^2}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{3\sqrt{x} - x^2}{x^3 - x\sqrt{x} - 2} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$i|w^2 - 2w\overline{w} + (\overline{w})^2| + 4w = 1 - i.$$

Svolgimento

$$1. f(x) = x(\lg|x|)^{2/3} \quad \text{ID} \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Poiché $f(-x) = -x(\lg|-x|)^{2/3} = -x(\lg|x|)^{2/3} = -f(x)$ f è dispari

Studiamo f per $x > 0$ e poi analizziamo il grafico rispetto a 0.

Per $x > 0$ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(\lg x)^{2/3} \geq 0 \quad \forall x > 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \lg x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (1, 0)$$

N.A.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\lg x)^{2/3} = +\infty \quad \nexists$ as. oz. az.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lg x)^{2/3} = +\infty \quad \nexists$ as. obliqua

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\lg x)^{2/3} = 0 \cdot (+\infty) = 0$ per gli ordini essendo $\lg x$ inf. lo
per $x \rightarrow 0^+$ di ordine comunque piccolo

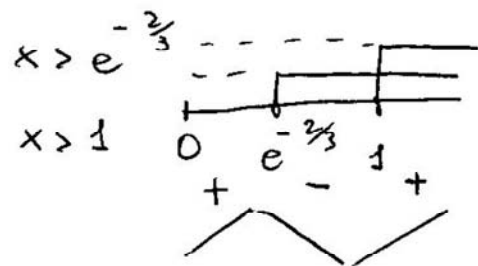
$$y' = (\lg x)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} (\lg x)^{-1/3} \cdot \frac{1}{x} = (\lg x)^{2/3} + \frac{2}{3(\lg x)^{1/3}} = \frac{3 \lg x + 2}{3(\lg x)^{1/3}}$$

ID (y'): $x > 0, \lg x \neq 0$ cioè $\text{ID}(y') = \text{ID}(y) - \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{3 \lg x + 2}{3(\lg x)^{1/3}} = \frac{2}{0^\pm} = \pm \infty \quad x = 1$ pto cuspidale

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{3 \lg x + 2}{(\lg x)^{1/3}} > 0 \Leftrightarrow \lg x > -\frac{2}{3}$$

$$\lg x > 0$$



$\Pi \begin{cases} x = e^{-2/3} \\ y = e^{-2/3}(-\frac{2}{3})^{2/3} = e^{-2/3} \sqrt[3]{\frac{4}{27}} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

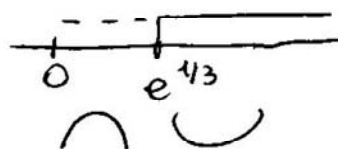
$$y'' = \frac{1}{3} \frac{3 \cdot \frac{1}{x} (\lg x)^{1/3} - (3 \lg x + 2) \cdot \frac{1}{3} (\lg x)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x}}{(\lg x)^{2/3}} = \frac{3 \lg x - 3 \lg x - 2}{3x (\lg x)^{2/3} \cdot (\lg x)^{2/3}}$$

$$= \frac{6 \lg x - 2}{9x (\lg x)^{4/3}}$$

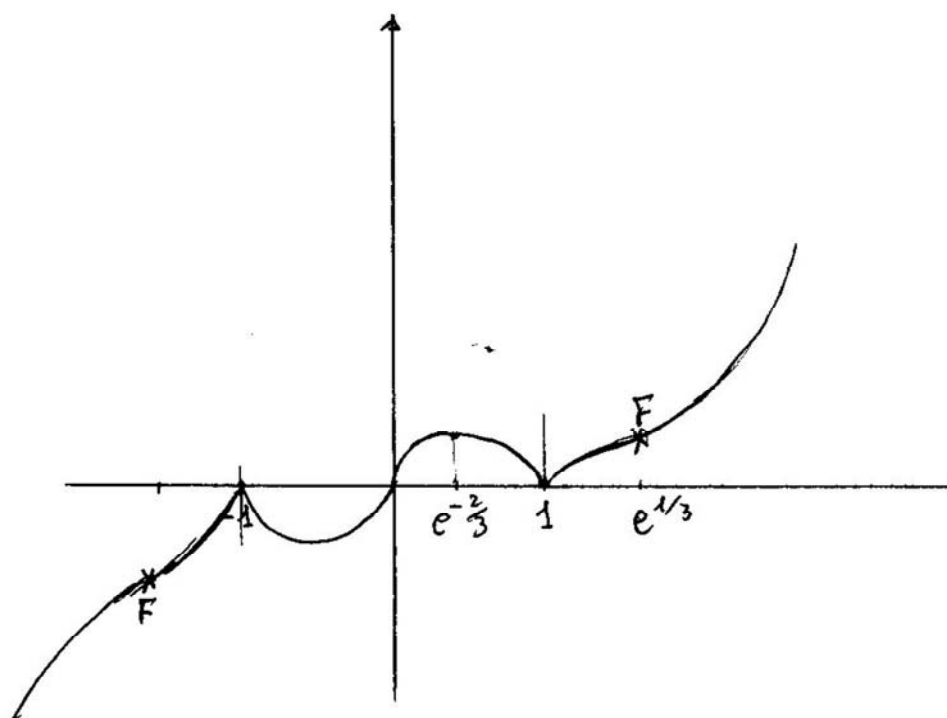
$\forall x > 0 \quad x \neq 1$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \lg x > \frac{1}{3}$
 $x > e^{1/3}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \lg x + 2}{3(\lg x)^{1/3}} = +\infty$



$F \begin{cases} x = e^{1/3} \\ y = e^{1/3} (\frac{1}{3})^{2/3} \end{cases}$



2. La funzione $y = \frac{\sin x - \arctg x}{x}$ è continua in $]0,1]$ e in $[1, +\infty[$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x} = 0 \quad \text{perché } \sin x - \arctg x \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ con ord. } > 1$$

e quindi f è integrabile in $]0,1]$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \arctg x}{x} = 0 \quad \text{con ordine } > 1 - \varepsilon \text{ perché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \arctg x}{x^\varepsilon} \neq 0$$

ma non confrontabile con 1
perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \arctg x)$

Siccome $\text{ord}(f)$ non è > 1 e quindi f non è ass. integrab. in $[1, +\infty)$ e non è integrabile essendo di segno costante (negativo) in un intorno di $+\infty$.

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \log x - e^x + e}{(\sqrt{x} - 1)^2} &= \lim_{x-1=y} \frac{e \log(1+y) - e^{1+y} + e}{((1+y)^{1/2} - 1)^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e \log(1+y) - e^{1+y} + e}{((1+y)^{1/2} - 1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) - y - \frac{y^2}{2}}{(\frac{1}{2}y)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{\frac{1}{4}y^2} = -4 \end{aligned}$$

perché per gli sviluppi di Taylor

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y - 1 = y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

e per un limite notevole $(1+y)^{1/2} - 1 \approx \frac{1}{2}y$.

$$\int \frac{3\sqrt{x} - x^2}{x^3 - x\sqrt{x} - 2} dx = \int \frac{3t - t^4}{t^6 - t^3 - 2} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{3t^2 - t^5}{t^6 - t^3 - 2} dt$$

$\sqrt{x} = t \quad x = t^2 \quad dx = 2t dt$

Decompongo il denominatore: poiché $t^6 - t^3 - 2 = (t^3 + 1)(t^3 - 2) \Rightarrow$

$$\frac{3t^2 - t^5}{(t+1)(t-\sqrt[3]{2})(t^2-t+1)(t^2+\sqrt[3]{2}t+1)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{t-\sqrt[3]{2}} + \frac{B_1t+C_1}{t^2-t+1} + \frac{B_2t+C_2}{t^2+\sqrt[3]{2}t+1}$$

$$\Rightarrow -t^5 + 3t^2 = A_1(t-\sqrt[3]{2})(t^2-t+1)(t^2+\sqrt[3]{2}t+1) + A_2(t+1)(t^2-t+1)(t^2+\sqrt[3]{2}t+1) + (B_1t+C_1)(t+1)(t^3-2) + (B_2t+C_2)(t^3+1)(t-\sqrt[3]{2}) \dots$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ricavano i valori delle 6 costanti. Supponiamo ad es. che siano tutte uguali a 1: si trova che

$$\int \frac{3\sqrt{x} - x^2}{x^3 - x\sqrt{x} - 2} dx = A_1 \lg(\sqrt{x}+1) + A_2 \lg|\sqrt{x}-\sqrt[3]{2}| + \frac{1}{2} \lg(x-\sqrt{x}+1) + \frac{1}{2} \lg(x+\sqrt[3]{2}\sqrt{x}+1) + (2-\sqrt[3]{2}) \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{2}}{4-\sqrt[3]{4}}$$

$$\text{poiché } \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{t^2-t+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \lg(t^2-t+1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \lg(t^2-t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c$$

$$\int \frac{t+1}{t^2+\sqrt[3]{2}t+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t+2}{t^2+\sqrt[3]{2}t+1} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2t+\sqrt[3]{2}}{t^2+\sqrt[3]{2}t+1} + \frac{2-\sqrt[3]{2}}{t^2+\sqrt[3]{2}t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \lg(t^2+\sqrt[3]{2}t+1) + \frac{2-\sqrt[3]{2}}{2} \int \frac{1}{(t+\frac{\sqrt[3]{2}}{2})^2 + 1-\frac{\sqrt[3]{4}}{4}} dt = \frac{1}{2} \lg(t^2+\sqrt[3]{2}t+1) + (2-\sqrt[3]{2}) \operatorname{arctg} \frac{2t+\sqrt[3]{2}}{4-\sqrt[3]{4}}$$

5. Posto $w = x+iy \Rightarrow \bar{w} = x-iy \Rightarrow w\bar{w} = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$ e l'eq. diventa

$$i |x^2 + y^2 + 2xyi - \cancel{x^2} - 2y^2 + \cancel{x^2} - y^2 - \cancel{2xyi}| + 4x + 4yi = 1-i$$

$$i |-4y^2| + 4x + 4yi = 1-i$$

$$4y^2i + 4x + 4yi = 1-i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x = 1 \\ 4y^2 + 4y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$w = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i \quad \text{unica soluzione}$$