COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(01/02/2012)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{|x^3 - 1|}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1/2]$, $[1/2, 1[$, $]1, 2]$, $[2, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{-\frac{1}{2}} \cos(x-1) - e^{\frac{x^2-2x}{2}}}{\operatorname{sen}(x-1) \operatorname{arctang}(x-1)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x^3 + 4}{(x-1)^2} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$|w^2 + 2w\overline{w} + \overline{w^2}| + 4w = -1 + i$$

1. $ID = \mathbb{R}^*$ $\quad f(-x) \neq \pm f(x)$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{|x^2-x-2|}{x^2} \end{cases}$ $\quad x^2 - x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$(-1,0)$ $(2,0)$ intersezioni con asse x

$f(x) > 0 \iff |x^2 - x - 2| > 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^*, x \neq -1, 2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\quad x = 0$ As. vert. $\qquad x^2 - x - 2 > 0 \iff x < -1 \vee x > 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x^2-x-2|}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^2} = 1$ $\qquad y = 1$ As. orizz. a $\pm\infty$

$$y' = \frac{\frac{x^2-x-2}{|x^2-x-2|}(2x-1)x^2 - 2x|x^2-x-2|}{x^4} = \frac{(x^2-x-1)(2x-1)x^2 - 2x(x^2-x-2)^2}{x^4 |x^2-x-2|}$$

$$= \frac{x^2-x-1}{|x^2-x-1|} \frac{x(\cancel{2x^2} - x - \cancel{2x^2} + 2x + 4)}{x^4} = \frac{x^2-x-1}{|x^2-x-1|} \frac{x(x+4)}{x^4}$$

$ID(y') = ID(y) - \{-1, 2\}$ $\qquad y' = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x}(x+4)}{x^{\cancel{4}3}} & x < -1 \vee x > 2 \\ -\dfrac{\cancel{x}(x+4)}{x^3} & -1 < x < 2, x \neq 0 \end{cases}$

$$y' > 0 \iff \begin{cases} \frac{x+4}{x^3} > 0 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{x+4}{x^3} > 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -4 \vee x > 0 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} -4 < x < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$$

$\iff x < -4 \vee x > \quad \vee -1 < x < 0$

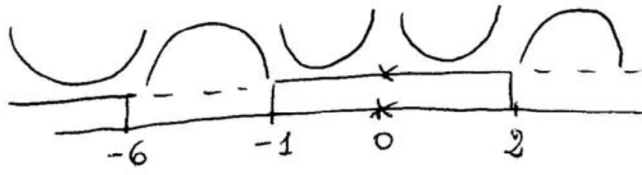
$m \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad m \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad M \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{5}{8} \end{cases}$

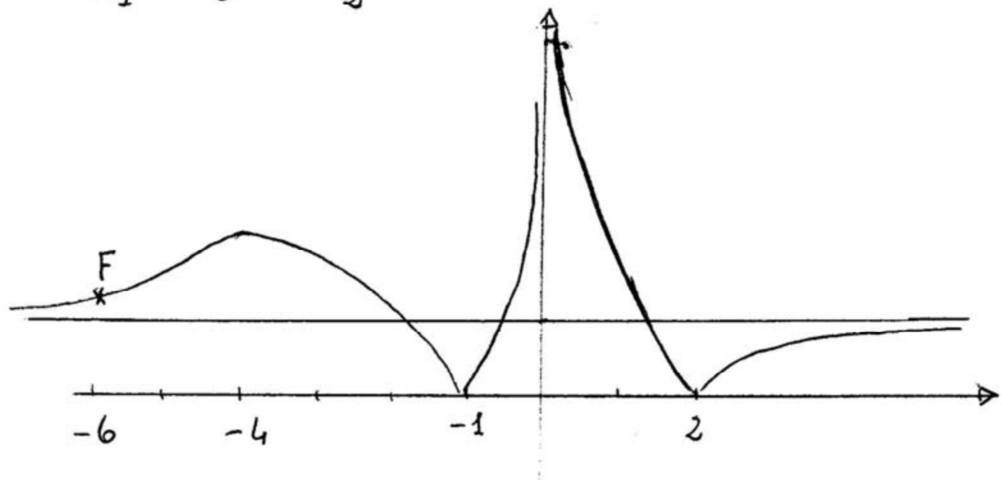
$\lim\limits_{x \to -1^-} y' = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+4}{x^3} = -3$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1^+} y' = \lim\limits_{x \to -1^+} -\dfrac{x+4}{x^3} = 3$ $\qquad x = -1$ pto angoloso

$\lim\limits_{x \to 2^-} y' = \lim\limits_{x \to 2^-} -\dfrac{x+4}{x^3} = -\dfrac{3}{4}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^+} y' = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+4}{x^3} = \dfrac{3}{4}$ $\qquad x = 2$ pto angoloso

$$y'' = \begin{cases} D\,\dfrac{x+4}{x^3} = \dfrac{-2x-12}{x^4} & x < -1 \vee x > 2 \\ D\left(-\dfrac{x+4}{x^3}\right) = \dfrac{2x+12}{x^4} & -1 < x < 2 \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$$y''>0 \iff \begin{cases} x<-6 \\ x<-1 \lor x>2 \end{cases} \lor \begin{cases} x>-6 \\ -1<x<2, \ x\neq 0 \end{cases} \iff x<-6 \lor -1<x<2$$





2. Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ con ordine 1 f non è integrabile in $]0, \frac{1}{2}]$.

Poiché $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x\sqrt{|x-1|}\sqrt{|x^2-x+1|}} = +\infty$ con ordine $\frac{1}{2} < 1$

e f è continua in $[\frac{1}{2}, 1[$, segue che f è integrabile in $[\frac{1}{2}, 1[$.

Per lo stesso motivo f è integrabile in $]1, 2]$ essendo

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ con ordine $\frac{1}{2} < 1$.

Infine f è integrabile in $[2, +\infty)$ perché è ivi continua e

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ con ordine $1 + \frac{3}{2} > 1$.

3. $$\lim_{x\to 1} \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left[\cos(x-1) - e^{\frac{x^2-2x+1}{2}}\right]}{\operatorname{sen}(x-1)\operatorname{arctg}(x-1)} \underset{x-1=y}{=} e^{-\frac{1}{2}} \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1 + 1 - e^{\frac{y^2}{2}}}{\operatorname{sen} y \operatorname{arctg} y}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}}{y \cdot y} = e^{-\frac{1}{2}} \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -e^{-1/2}.$$

4.
$$\begin{array}{lll} x^3 & +4 & \lfloor\, x^2-2x+1 \\ \underline{x^3-2x^2+x} & & x+2 \\ // \ +2x^2 - x + 4 & & \\ \underline{2x^2-4x+2} & & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+4}{x^2-2x+1}\,dx = \int\left(x+2+\frac{3x+2}{x^2-2x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{d}{dx}\,\frac{B}{x-1}\right)dx$$

con A e B costanti tali che $\dfrac{3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{A}{x-1} - \dfrac{B}{(x-1)^2} = \dfrac{Ax-A-B}{(x-1)^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ -A-B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3-2 = -5 \end{cases}$$

Dunque

$$\int \frac{x^3+4}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{d}{dx}\,\frac{-5}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 3\lg|x-1| + \frac{5}{x-1} + C.$$

5. Poiché $\overline{\omega^2} = \overline{\omega\cdot\omega} = \bar{\omega}\cdot\bar{\omega} = \bar{\omega}^2$ l'equazione si riscrive

$|(\omega+\bar{\omega})^2| + 4\omega = -1+i.$ Posto $\omega = x+iy$ si ha $(\omega+\bar{\omega})^2 = (2x)^2 = 4x^2$

e quindi

$$|4x^2| + 4x + 4yi = -1+i \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+4x+1 = 0 \\ 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{4}$ unica sol. dell'equazione