

ESONERO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(10/01/2012)

Esercizio 1. Calcolare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(\arcsen(\frac{2}{\pi} \arctang(x \log(x))))}{\sqrt{\log(\arctang(x))} \sqrt{\arctang(\log(x))}}.$$

Esercizio 2. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$iw^2 - 5w + 6 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right) i = 0.$$

Esercizio 3. Senza usare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{x+1}}{\log(\sin(e^x - 1) + 1)}.$$

Esercizio 4. Stabilire se la seguente funzione è continua e derivabile

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log(1+x)} & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{(e^x - 1) \arctang(x)}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare l'immagine mediante la seguente funzione

$$f(x) = \arctang\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$$

dell'intervallo $] -2, 3]$.

$$1. \begin{cases} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x \lg x) \right) > 0 \\ \lg(\operatorname{arctg} x) > 0 \\ \operatorname{arctg}(\lg x) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x \lg x) \leq 1 \\ \operatorname{arctg} x > 1 \\ \lg x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{arctg}(x \lg x) \leq \frac{\pi}{2} \\ x > \lg 1 \\ x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \lg x > 0 \\ x > \lg 1 \\ x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x > \lg 1 > \lg \frac{\pi}{4} = 1 \\ x > \lg 1 \end{cases}$$

$$ID =] \lg 1, +\infty)$$

$$2. i\omega^2 - 5\omega + 6(\cos \pi + i \sin \pi)i = 0$$

$$i\omega^2 - 5\omega - 6i = 0$$

$$\omega_1 = -4i \quad \omega_2 = -6i$$

$$\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24i^2}}{i} = \frac{5 \pm 1}{i} = \begin{cases} \frac{4i}{i^2} = -4i \\ \frac{6i}{i^2} = -6i \end{cases}$$

$$3. \operatorname{ord}(e^x - \sqrt{x+1}) = \operatorname{ord}(e^x - 1 + 1 - (1+x)^{1/2}) = 1$$

$$\text{perché } e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}x \quad \text{e quindi}$$

$$e^x - 1 + 1 - (1+x)^{1/2} \sim x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

$$\operatorname{ord}(f(\sin(e^x - 1) + 1)) = 1$$

$$\text{perché } f(\sin(e^x - 1) + 1) \sim \sin(e^x - 1) \sim e^x - 1 \sim x$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{x+1}}{\lg(\sin(e^x - 1) + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\lg(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{0} = 0$$

$$\text{perché } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{con ordine molto grande mentre}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lg(1+x) = 0 \quad \text{con ordine 1.}$$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) \operatorname{arctg} x}{x} = 1 \cdot 0 = 0$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ segue che $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

e dunque f è continua in $x=0$, anzi in tutto il suo dominio.

Vediamo se è derivabile in $x=0$ (per $x \neq 0$ lo è perché rapporto di funzioni derivabili). Si ha

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}_0 \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_1 = 0$$

perché $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$ con ord. comunque grande.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) \operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Poiché $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$ esistono $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ma f non è derivabile in $x=0$.

5. Poiché $ID = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ e $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^2} \frac{2x(1-x^2) + 2x^3}{(1-x^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

segue che f è crescente in $[0, 1[$ e in $]1, +\infty)$

mentre è decrescente in $(-\infty, -1[$ e in $] -1, 0]$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = e$ e $\operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(-2) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$f(3) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{9}{8}\right)$$

$$f(0) = 0$$

Segue che $f([-2, 3]) =]-\frac{\pi}{2}, -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}] \cup [0, \frac{\pi}{2}] \cup]-\frac{\pi}{2}, -\operatorname{arctg} \frac{9}{8}]$.

