

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(19/09/2011)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} - e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctang} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \log^2(1+x) - e^{x^2}}{x(\sqrt{1+x} - 1)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \operatorname{arctang} \left(\frac{1}{x} \right) dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

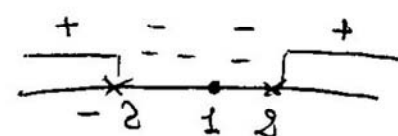
$$w^2 \bar{w} - \bar{w} w = -\bar{w}.$$

$$1. ID: x^2 - 4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \quad f \text{ ne-pare ne-dispare}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y = e^{-\frac{1}{4}} - e^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} = e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} \Rightarrow \frac{|x-1|}{x^2-4} = -\frac{|x-1|}{x^2-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2|x-1|=0 \Rightarrow x=1 \quad (1,0) \text{ intersec. con asse } x$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} > e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} \Rightarrow \frac{|x-1|}{x^2-4} > -\frac{|x-1|}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$2 \frac{|x-1|}{x^2-4} > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$$


$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2, \quad x \neq 1$$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} - e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} = 1 - 1 = 0 \quad y=1 \text{ A.O. } a \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} - e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} = e^{+\infty} - e^{+\infty} = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-1|}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} - e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} = e^{+\infty} - e^{+\infty} = +\infty$$

Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$x = \pm 2$ As verticali

Studio della derivata

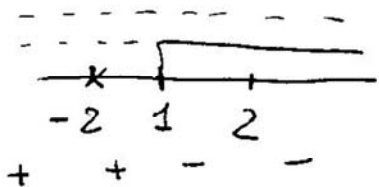
$$y' = e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} \frac{\frac{x-1}{|x-1|} (x^2-4) - 2x|x-1|}{(x^2-4)^2} + e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} \frac{\frac{x-1}{|x-1|} (x^2-4) - 2x|x-1|}{(x^2-4)^2}$$

$$= \left(e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} + e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} \right) \frac{(x-1)(x^2-4-2x^2+2x)}{|x-1|(x^2-4)^2}$$

$$= \left(e^{\frac{|x-1|}{x^2-4}} + e^{-\frac{|x-1|}{x^2-4}} \right) \frac{(x-1)(-x^2+2x-4)}{|x-1|(x^2-4)^2} \quad \forall x \in \text{ID}(f), x \neq 1 \quad (2)$$

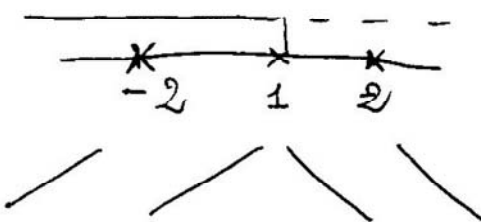
$$y' > 0 \Leftrightarrow (x-1)(-x^2+2x-4) > 0$$

$$x > 1 \quad -x^2+2x-4 > 0 \quad x^2-2x+4 < 0 \quad \emptyset$$



$$y' > 0 \Leftrightarrow x < 1, x \neq -2$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow x > 1, x \neq 2$$



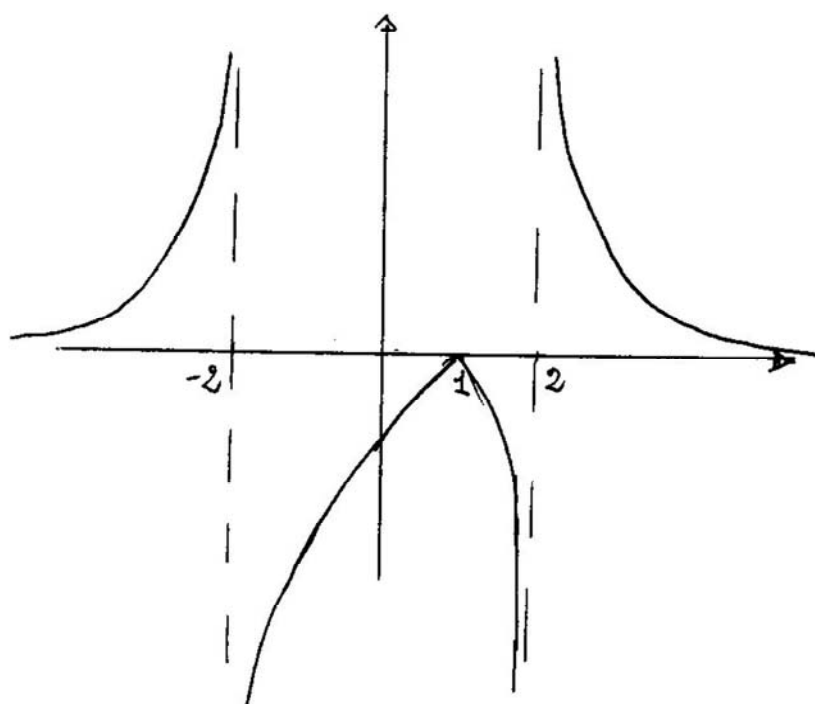
$x = 1$ pto di massimo rel. proprio

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(e^{-\frac{(x-1)}{x^2-4}} + e^{\frac{x-1}{x^2-4}} \right) (-1) \frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2} = 2 \cdot (-1) \frac{(-3)}{8} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 \text{ pto angoloso} \\ y = e^0 - e^0 = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}$$



2. f è continua in $[0, 1]$ e in $[1, +\infty)$. Inoltre poiché $\arctan x \sim x$ se $x \sim 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt{x})^2} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = +\infty \quad \text{e quindi } \frac{1}{2} < 1$$

(3)

e quindi f è integrabile in $[0, 1]$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = 0 \text{ con}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad \text{ordine } \frac{3}{2} > 1$$

e quindi f è integrabile in $[1, +\infty)$.

3. Poiché $\lg^2(1+x) \sim x^2$, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lg^2(1+x) - e^{x^2}}{x(\sqrt{1+x} - 1)} = 0$ poiché il numeratore è un infinitesimo di ord. > 2 mentre il denominatore ha ordine 2.

4. $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = \int (Dx) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \int \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \lg(x^2+1) + C.$$

5. $\bar{\omega} [\omega^2 - \omega + 1] = 0 \Rightarrow \bar{\omega} = 0 \vee \omega^2 - \omega + 1 = 0$

$$\Rightarrow \omega = 0 \vee \omega_{\pm} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$