

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(19/07/2011)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(|\log(x)|) - 2\log^2(|x|)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log^4(1 + \sqrt{x})}{x + \log(1 + xe^{x^2})}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\text{arctang}(\text{sen}(x))) - \text{arctang}(\text{sen}(x))}{\text{sen}(\text{arctang}(x)) + \text{sen}(x)}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{e^{3x} - 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w - \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) |w|^2 = 5 - 4\overline{w}.$$

Svolgimento

$$f(x) = \lg |\lg x| - 2 \lg^2 |x|$$

$$ID \begin{cases} |\lg x| > 0 \\ |x| > 0 \end{cases} \begin{cases} \lg x \neq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

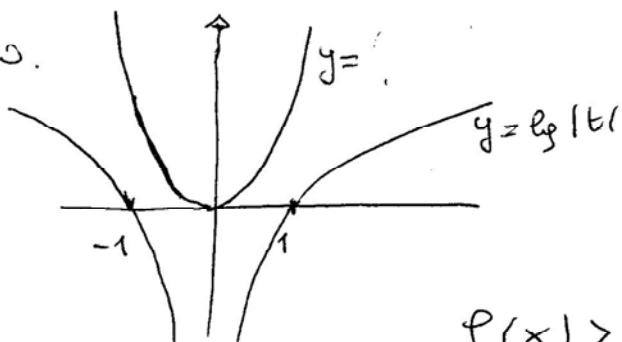
$ID =]0, 1[\cup]1, \infty)$ Poiché f è definita solo per $x > 0$, $x \neq 1$ il valore assoluto nel 2° addendo è superfluo, e quindi si può scrivere

$$f(x) = \lg |\lg x| - 2 \lg^2 x \quad x > 0, x \neq 1.$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \lg |\lg x| - 2 \lg^2 x > 0 \quad \text{posto } \lg x = t \text{ la diseq.}$$

diventa $\lg |t| > 2t^2$ che si può studiare con il metodo

grafico.



Poiché il grafico di $y = 2t^2$ (parabola) è sempre al di sopra del grafico di $y = \lg |t|$ segue che

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 & x &\in \emptyset \\ f(x) &= 0 & x &\in \emptyset \\ f(x) &< 0 & \forall x &\in ID \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg |\lg x| - 2 \lg^2 |x| = \lim_{\substack{\lg x = t \\ t \rightarrow -\infty}} \lg |t| - 2t^2 = -\infty$$

per gli ordini essendo $\text{ord } \lg |t| < \text{ord}(2t^2)$

Quindi $x = 0$ A.V.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\lg |\lg x|}_{- \infty} - \underbrace{2 \lg^2 x}_0 = -\infty \quad x = 1 \text{ A.V. completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg |\lg x| - 2 \lg^2 x = \lim_{\substack{\lg x = t \\ t \rightarrow +\infty}} \lg |t| - 2t^2 = -\infty$$

per gli ordini

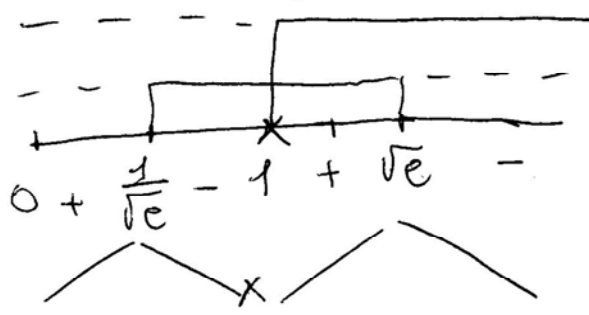
$\nexists$ as. orizzontali

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg |\lg x| - 2 \lg^2 x}{x} = 0 \quad (\text{per gli ordini o con Ter. di de L'Hôpital})$$

$\nexists$ as. obliqui

$$y' = D(\lg | \lg x | - 2 \lg^2 x) = \frac{1}{x \lg x} - \frac{4 \lg x}{x} = \frac{1 - 4 \lg^2 x}{x \lg x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$y' > 0 \quad \begin{aligned} 1 - 4 \lg^2 x &> 0 \\ x \lg x &> 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} < \lg x < \frac{1}{2} \\ \lg x > 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 1/\sqrt{e} < x < \sqrt{e} \\ x > 1 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{e}} \\ y = -\lg^2 - \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt{e} \\ y = -\lg^2 - \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{pti di massimo}$$

$$y'' = D\left(\frac{1}{x \lg x} - \frac{4 \lg x}{x}\right) = -\frac{\lg x + 1}{(x \lg x)^2} - 4 \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \lg x}{x^2} = \frac{-\lg x + 1 - 4 \lg^3 x}{x^2 \lg^2 x}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 4 \lg^3 x - 4 \lg^2 x - \lg x - 1 > 0$$

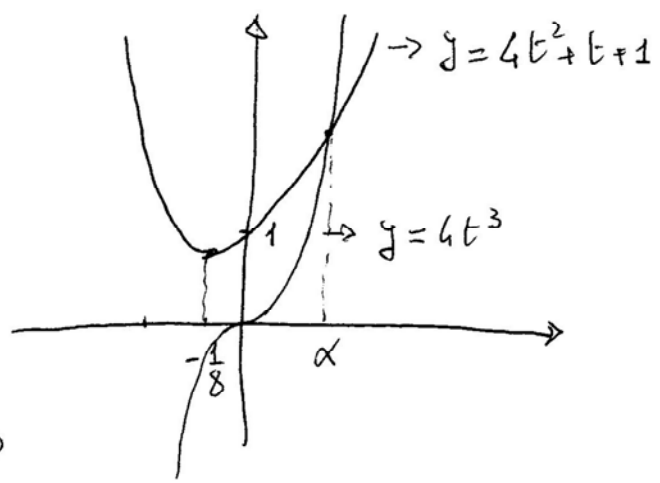
Posto $\lg x = t$ si ha la diseq. $4t^3 - 4t^2 - t - 1 > 0$ (*)

Poiché non si riesce a trovare 1 radice dell'equazione associata, possiamo studiare la disuguaglianza solo con il metodo grafico

$$4t^3 > 4t^2 + t + 1$$

$$y = 4t^2 + t + 1$$

$$V(-\frac{1}{8}, \frac{15}{16})$$

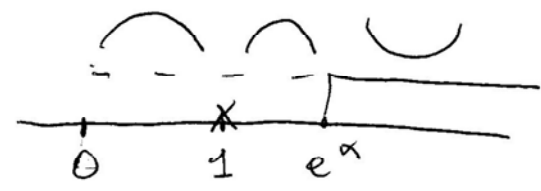


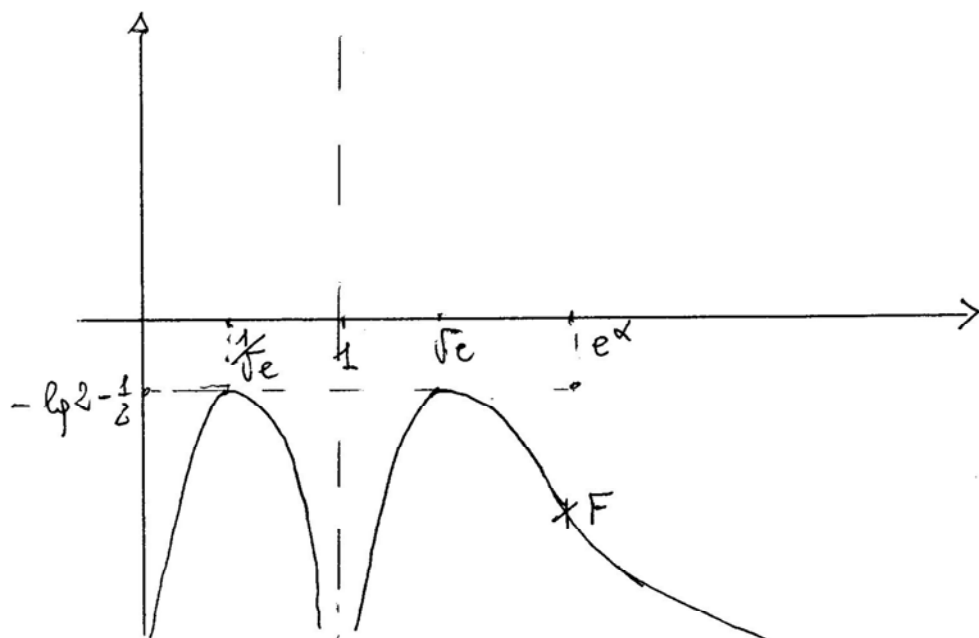
Le due curve si incontrano in un pto di ascissa $t = \alpha > 0$

quindi la diseq. (*) è verificata per $t > \alpha \Leftrightarrow \lg x > \alpha$

$$\Leftrightarrow x > e^\alpha > 1 \quad \text{Dunque } y'' > 0 \Leftrightarrow x > e^\alpha$$

$x = e^\alpha$ ascisse di un flesso F





N.B. lo studio delle positive e delle convergenze delle funzioni non è strettamente indispensabile. Il grafico della funzione si può ricavare anche dagli asintoti e dalla monotonia.

2. f è continua in $]0,1]$ e in $[1, +\infty[$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg^4(1+\sqrt{x})}{x + \lg(1+x e^{x^2})} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0 \text{ per gli ordini}$$

essendo $\text{ord}(\lg^4(1+\sqrt{x}))$ comunque piccolo
 $\text{ord}(x + \lg(1+x e^{x^2})) \geq \text{ord } x = 1$

Per decidere l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ studio l'ordine di infinito del denominatore. Posso preso $\alpha > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \lg(1+x e^{x^2})}{x^\alpha} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{1+x e^{x^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}}_0 + \frac{x^{\cancel{x^2}} e^{\cancel{x^2}} \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right)}{\cancel{x} e^{\cancel{x^2}} \left(\frac{1}{x e^{x^2}} + 1 \right)} \cdot \frac{1}{\cancel{x} x^{\alpha-1}} \right) = 2 \in \mathbb{R}^+ \text{ se } \alpha-1=1$$

$(\Rightarrow) \alpha = 2$

segue che $\text{ord}(x + \lg(1+x e^{x^2})) = 2$ e quindi

$\text{ord } f \leq 2$ e $\text{ord } f > 2 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0,2[$. In particolare

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ con ordine $\alpha > 1$ e quindi (4)

f è integrabile in $[0, +\infty)$.

Poiché $\lg^4(1+\sqrt{x}) \sim (\sqrt{x})^4 = x^2$ se $x \rightarrow 0$

$\lg(1+x e^{x^2}) \sim x e^{x^2}$ segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg^4(1+\sqrt{x})}{x + \lg(1+x e^{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x})^4}{x + x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(1+e^{x^2})} = 0$$

e quindi f è integrabile (in senso classico) in $]0, 1]$.

3. Poiché per $x \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)) &\sim \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) \sim \operatorname{sen} x \sim x \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) &\sim \operatorname{sen} x \sim x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{ord}(\operatorname{Num}) > 1$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{sen} x \sim \operatorname{arctg} x + x \sim 2x \Rightarrow \operatorname{ord}(\operatorname{Den}) = 1$$

e quindi prevale l'ordine del Numeratore, cioè 1 e limite proposto vale 0.

$$4. \text{ Posto } e^{3x} = t \Rightarrow 3x = \lg t \Rightarrow x = \frac{1}{3} \lg t \Rightarrow dx = \frac{1}{3t} dt$$

$$\int \frac{dx}{e^{3x}-1} = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{3t} dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \right) dt = \frac{1}{3} \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) dt$$

$$\left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{1}{t(t-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=-1 \\ B=1 \end{matrix} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (-\lg|t| + \lg|t-1|) + C = \frac{1}{3} \lg \left| \frac{t-1}{t} \right| + C = \sqrt[3]{\lg \left(\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}} \right)} + C$$

$$5. \text{ Poiché } \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i \text{ where}$$

$$x + iy - i(x^2 + y^2) = 5 - 4x + 4yi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 4x \\ y^2 - x^2 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5} \quad \omega_{1,2} = 1 + (-3 \pm \sqrt{5})i \text{ soluzioni dell'equazione}$$