

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(27/06/2011)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left(\left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right| \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x|1-x|}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1[$, $]1, 2]$, $[2, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x) - \log(1+x)}{\arctang(x) + e^x + \sqrt{1+x^2} - 2}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{2 \sin(x) - 5 \cos(x) + 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 + 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{7} \right) \right) \left(\cos \left(\frac{6\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{6\pi}{7} \right) \right) = 2\overline{w} - |w|^2.$$

1. ID: $\left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right| > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} + 1 - 4e^x}{2e^x} \neq 0$ (1)

$$e^{2x} - 4e^x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq \lg(2 \pm \sqrt{3})$$

$$ID = \mathbb{R} - \{ \lg(2 \pm \sqrt{3}) \}$$

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID$$

$\Leftrightarrow f$ par e quindi g_f è simmetrica rispetto all'asse y

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \lg 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ \lg \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{e^{2x} - 4e^x + 1}{2e^x} \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = \pm 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 2e^x \vee e^{2x} - 4e^x + 1 = -2e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 1 = 0 \vee e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{x}{2}} = 3 \pm \sqrt{8} \vee e^x = 1 \Leftrightarrow x = \lg(3 \pm \sqrt{8}) \vee x = 0$$

$(\lg(3 \pm \sqrt{8}), 0)$ $(0, 0)$ intersezioni con gli assi

Positività $\lg \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right| > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{e^{2x} - 4e^x + 1}{2e^x} \right| > 1 \Leftrightarrow$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 < -2e^x \vee e^{2x} - 4e^x + 1 > 2e^x \Leftrightarrow$$

$$e^x < 3 - \sqrt{8} \vee e^x > 3 + \sqrt{8} \vee (e^{2x} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x < \lg(3 - \sqrt{8}) \vee x > \lg(3 + \sqrt{8}) \vee \phi$$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \lg \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right| = +\infty \quad \nexists \text{ as. orizzontali}$$

$$\lim_{x \rightarrow \lg(2 \pm \sqrt{3})} \lg \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right| = \lim_{y \rightarrow 0^+} \lg y = -\infty \quad x = \lg(2 \pm \sqrt{3}) \text{ A. V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right|}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 4}$$

$$e^x = y \quad = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y - \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{y} - 4} = 1 \quad (\text{eventuale coeff. ang. dell'as. obliquo } a + \infty) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right) - \lg e^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg \left(\frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2}{e^x} \right) = \lg \frac{1}{2} = -\lg 2 \quad y = x - \lg 2 \quad \text{A.o.b. } a + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lg \left| \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 4} \stackrel{e^x = y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{y} - 4} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 1}{y^2 - 4y + 1} = -1 \quad (\text{eventuale coeff. ang. as. ob. } a - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right) + \lg e^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg \left[\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2 \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg \left(\frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{2} \right) = \lg \frac{1}{2} = -\lg 2$$

$$y = -x - \lg 2 \quad \text{as. ob. } a - \infty$$

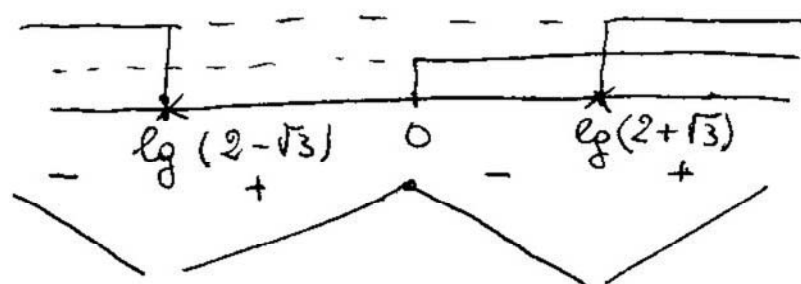
Crescenza e decrescenza, massimi e minimi

$$y' = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 4} \cdot \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 4e^x + 1} \quad ID(y') \neq ID(y) \quad \text{più di non derivabile}_{\frac{1}{e}}$$

$$y' > 0 \quad N > 0 \quad e^{2x} - 1 > 0 \quad 2x > 0 \quad x > 0$$

$$D > 0 \quad e^{2x} - 4e^x + 1 > 0 \quad e^x < 2 - \sqrt{3} \vee e^x > 2 + \sqrt{3}$$

$$x < \lg(2 - \sqrt{3}) \vee x > \lg(2 + \sqrt{3})$$



$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ massimo relativo

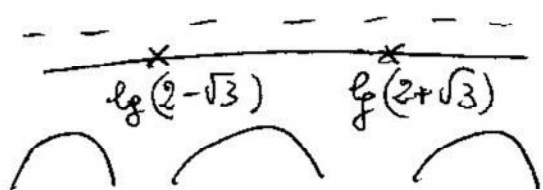
Concavità, convessità e flessi

$$y'' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x} - 4) - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x} - 4)^2}$$

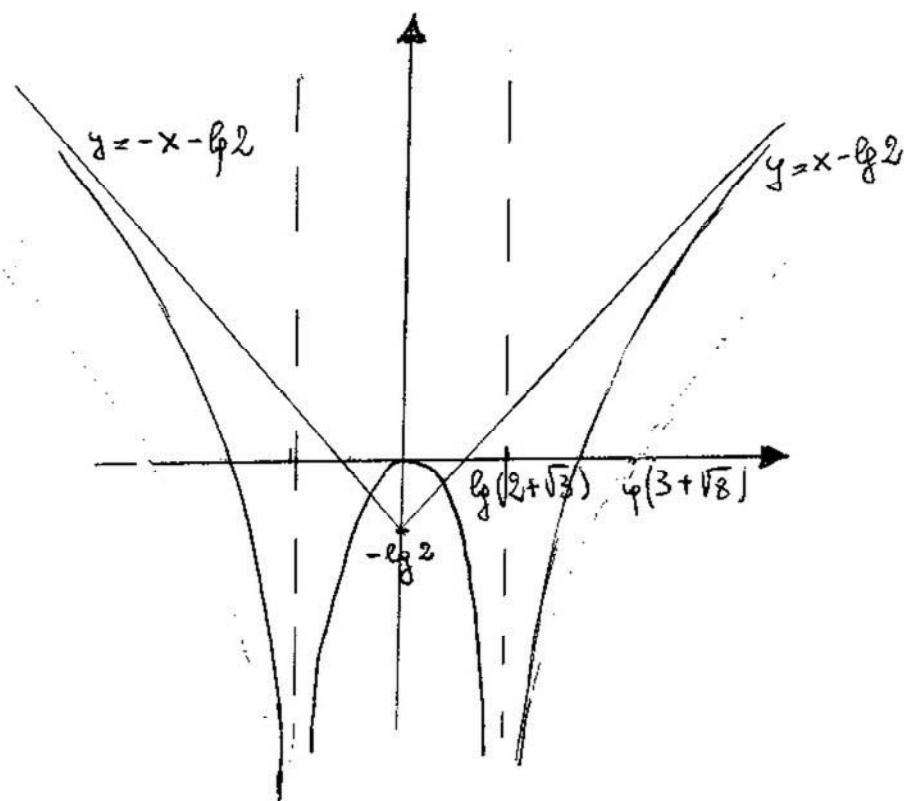
$$y'' > 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x} - 4e^x - 4e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 1 > 0 \Leftrightarrow (3)$$

$$4e^x + 4e^{-x} - 3 < 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - 3e^x + 4 < 0 \quad \Delta < 0$$

imposs.



f è concava in $(-\infty, \log(2-\sqrt{3}))$,
in $]\log(2-\sqrt{3}), \log(2+\sqrt{3})[$ e in $]\log(2+\sqrt{3}), +\infty)$.



2. f è continua in $]0, 1[\cup]1, +\infty)$. Studiare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x|1-x|}} = +\infty \text{ con ordine } \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \text{ integrabile in s.i. in }]0, \frac{1}{2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x|1-x|}} = +\infty \text{ con ord. } \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \text{ integ. in s.i. in } [\frac{1}{2}, 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x|1-x|}} = +\infty \text{ con ord. } \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f \text{ integ. in s.i. in }]1, 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x|1-x|}} = 0 \text{ con ord. } 1 \Rightarrow f \text{ non è integ. in } [2, +\infty)$$

3. Poiché $\arcsin x \sim x$, $\log(1+x) \sim x$ il numeratore per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine > 1 . Il denominatore invece

ha ordine 1 essendo $\arctg x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$ (poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$). Si conclude perciò che il limite vale 0 essendo $\text{ord}(\text{Num.}) > \text{ord}(\text{Den.})$.

4. Posto $\text{sen } x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \arctg t$
 $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
 e l'integrale diventa

$$\int \frac{dx}{2 \text{sen } x - 5 \cos x + 1} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{4t}{1+t^2} - 5 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = 2 \int \frac{dt}{6t^2 + 4t - 4} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t - 2}$$

$$\frac{1}{3t^2 + 2t - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{A}{t + \frac{1-\sqrt{7}}{3}} + \frac{B}{t + \frac{1+\sqrt{7}}{3}} \right) =$$

$$= \frac{(A+B)t + A \frac{1+\sqrt{7}}{3} + B \frac{1-\sqrt{7}}{3}}{3t^2 + 2t - 2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A \frac{1+\sqrt{7}}{3} + B \frac{1-\sqrt{7}}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow A \frac{(1+\sqrt{7}) - (1-\sqrt{7})}{3} = 1$$

$$\begin{cases} A = \frac{3}{2\sqrt{7}} \\ B = -\frac{3}{2\sqrt{7}} \end{cases} \quad \int \frac{dx}{2 \text{sen } x - 5 \cos x + 1} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \left(\ln \left| t + \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right| - \ln \left| t + \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right| \right) + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{7}}{3 \tan \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{7}} \right| + C$$

5. Poiché $(\cos \frac{\pi}{7} + i \text{sen} \frac{\pi}{7})(\cos \frac{6}{7}\pi + i \text{sen} \frac{6}{7}\pi) = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{6}{7}\pi + i^2 \text{sen} \frac{\pi}{7} \text{sen} \frac{6}{7}\pi$
 $+ i (\cos \frac{\pi}{7} \text{sen} \frac{6}{7}\pi + \text{sen} \frac{\pi}{7} \cos \frac{6}{7}\pi) = \cos(\frac{\pi}{7} + \frac{6}{7}\pi) + i \text{sen}(\frac{\pi}{7} + \frac{6}{7}\pi)$
 $= \cos \pi + i \text{sen} \pi = -1$ l'eq. diventa

$w^2 - 4 = 2\bar{w} - |w|^2$. Posto $w = x + iy$ si ha

$$x^2 - y^2 + 2xyi - 4 = 2x - 2yi - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ (2xy + 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \\ y(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = +2 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Le sol. dell'eq. sono $w = -1 + iy \quad (y \in \mathbb{R}) \vee w = 2$

