

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(28/02/2011)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(|\log(|x - 2|)|)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\arcsen(x^\alpha)}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \arctan(x)}{\log(1-x) - \sin(x) + x(1 - \cos(x))}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$(w^2 + |w|^2)(|4w + 7| - 1) = 0.$$

$$1. f(x) = \arctg |\lg |x-2||$$

$$ID: |x-2| > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ y = \lg |x-2|}} \arctg |y| = \frac{\pi}{2}$$

As. verticali

per $x=2$ f è prolungabile per continuità

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg |y| = \frac{\pi}{2}$$

$y = \frac{\pi}{2}$ as. orizz. a $\pm\infty$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |\lg |x-2|| > 0 \Leftrightarrow \lg |x-2| \neq 0 \Leftrightarrow |x-2| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1, 3.$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \arctg |\lg 2| = \arctg (\lg 2) \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ |\lg |x-2|| = 0 \Leftrightarrow |x-2|=1 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$(0, \arctg \lg 2) \quad (3, 0) \quad (1, 0)$ intersezioni con gli assi $x=1$

$$y' = \frac{1}{1 + (\lg |x-2|)^2} \cdot \frac{\lg |x-2|}{|\lg |x-2||} \cdot \frac{1}{x-2}$$

$$\text{Poiché } \lg |x-2| > 0 \Leftrightarrow$$

$$|x-2| > 1 \Leftrightarrow x-2 < -1 \vee x-2 > 1$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \text{ allora}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{1 + \lg^2(x-2)} \cdot \frac{1}{x-2} \\ -\frac{1}{1 + \lg^2(-x+2)} \cdot \frac{1}{x-2} \end{cases}$$

$$\text{se } x < 1 \vee x > 3$$

$$ID(y') = \mathbb{R} - \{2, 1, 3\}$$

$$\text{se } 1 < x < 3, x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = \frac{1}{1 + \lg^2 1} \cdot (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = \frac{-1}{1 + \lg^2 1} \cdot (-1) = 1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'_-(1) = -1 \neq 1 = f'_+(1) \\ x=1 \end{array} \right\} \text{pto angoloso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} y' = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} y' = -1$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ pto angoloso}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y' = \frac{1}{+\infty} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$$

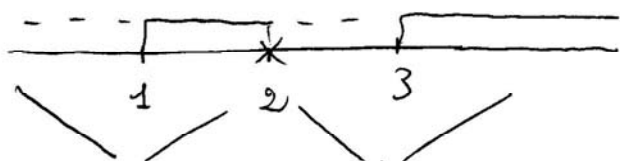
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \frac{1}{+\infty} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x=2$ pto cuspidale per la funzione prolungata per continuità nel pto $x=2$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 3 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 1 < x < 3, x \neq 2 \\ -(x-2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 3 \vee 1 < x < 2$$



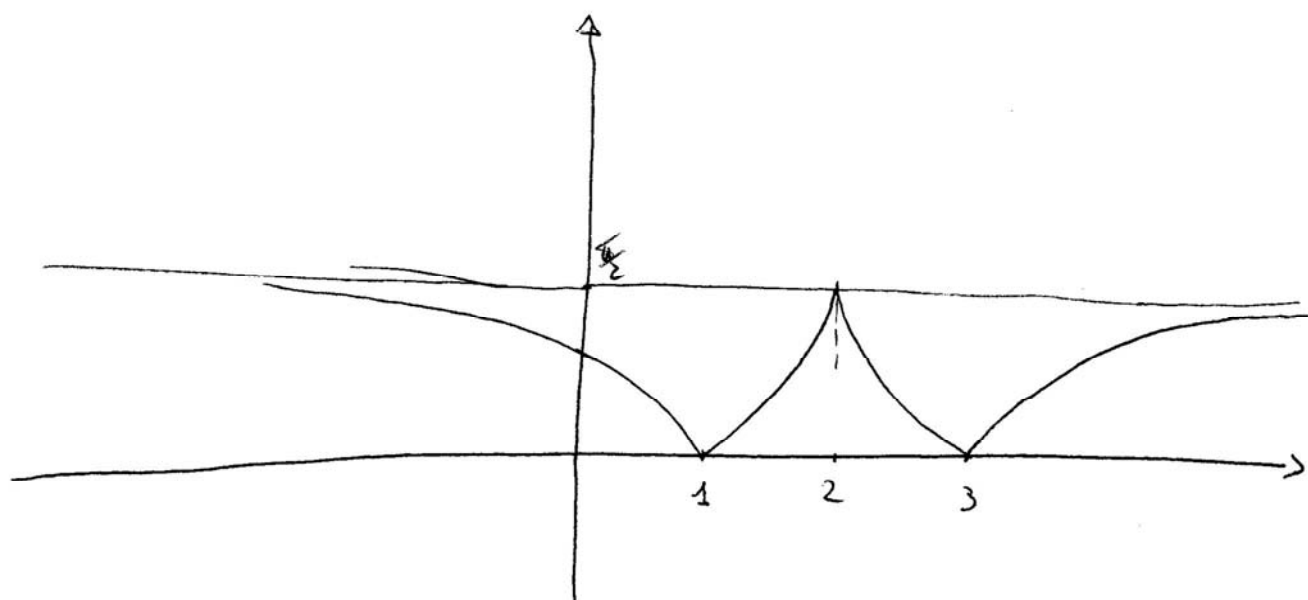
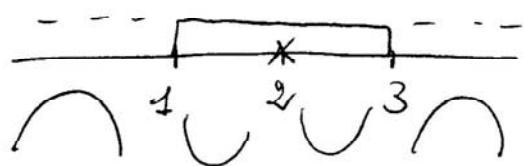
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

minimi relativi e assoluti (lo sapevamo già essendo $f \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ e $f = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$)

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ pt di massimo se prolunghiamo } f \text{ per continuit\`a}$$

$$y'' = \begin{cases} - \frac{2 \lg(x-2) \cdot \frac{1}{x-2} (x-2) + (1 + \lg^2(x-2))}{[(1 + \lg^2(x-2))(x-2)]^2} = - \frac{(\lg(x-2) + 1)^2}{[(1 + \lg^2(x-2))(x-2)]^2} & x < 1 \vee x > 3 \\ \frac{2 \lg(-x+2) \cdot \frac{-1}{-x+2} (x-2) + (1 + \lg^2(x-2))}{[(1 + \lg^2(x-2))(x-2)]^2} = \frac{(\lg(x-2) + 1)^2}{[(1 + \lg^2(x-2))(x-2)]^2} & 1 < x < 3, x \neq 2 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3, x \neq 2$$



2. Se $\alpha = 0$ $f(x)$ non è proprio definita (il denominatore vale sempre 0) e quindi non ha senso testare se è integrabile. Se $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsen x^\alpha}{x^{1-\alpha} \sqrt{1-x^{2\alpha}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{x^{1-\alpha} \sqrt{1-x^{2\alpha}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2\alpha-1}}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{con ord. } 2\alpha-1 & \text{se } 2\alpha-1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2} \\ 1 & & \text{se } 2\alpha-1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{con ord. } 1-2\alpha & \text{se } 2\alpha-1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nei primi 2 casi f è integrabile perché il limite $\exists$ finito,

nel 3° caso f è integrabile se $0 < 1-2\alpha < 1$ cioè $\alpha > 0$ ($\alpha < \frac{1}{2}$).

Concludendo f è integ. in s.i. in $]0, \frac{1}{2}]$ se $\alpha > 0$, non lo è se $\alpha \leq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsen x^\alpha}{x^{1-\alpha} \sqrt{1-x^\alpha} \sqrt{1+x^\alpha}} = \frac{\arcsen 1}{1 \cdot \sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^\alpha}}$$

$$= +\infty \quad \text{con ordine } \frac{1}{2} < 1 \quad \left(\text{essendo } (1-x^\alpha)^{\frac{1}{2}} = (1-(1+y)^\alpha)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \simeq (-\alpha y)^{\frac{1}{2}} = (-\alpha(x-1))^{\frac{1}{2}} \text{ se } x \rightarrow 1^- \right)$$

segue che f è integrabile in s.i. in $[\frac{1}{2}, 1[$ per il criterio dell'ordine di infinito.

3. Poiché $\operatorname{tg} x \sim x$ e $\operatorname{arctg} x \sim x$ per studiare l'ordine del denominatore occorre usare la formula di Taylor:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x \sim x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right) \simeq \frac{2}{3} x^3$$

Il denominatore invece ha ordine 1 essendo

$$\lg(1-x) \sim -x \quad \text{e quindi} \quad \lg(1-x) - x + x(1-\cos x) \sim -2x.$$

$$\operatorname{sen} x \sim x$$

$$x(1-\cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2}$$

Concludendo, il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} x^3}{-2x} = 0.$$

(4)

$$4. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = \int D\left(-\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Possiamo $\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx$

$$= +\lg|x| - \frac{1}{2} \lg(x^2+1) + C$$

e l'integrale assegnato vale

$$-\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x + \lg|x| - \frac{1}{2} \lg(x^2+1) + C.$$

$$5. (w^2 + |w|^2)(14w + 7| - 1) = 0 \Leftrightarrow w^2 + |w|^2 = 0 \vee (14w + 7| = 1$$

Poniamo $w = x + iy$ la 1^a eq. diventa

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2xyi = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x + iy) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + iy = 0 \Leftrightarrow w = x \in \mathbb{R}$$

e cioè la 1^a equazione ha come soluzioni tutti i numeri reali.

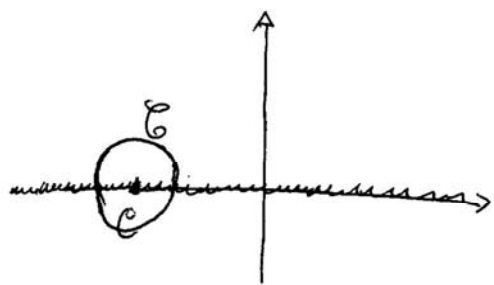
La 2^a eq. invece diventa, ricordando la definizione di modulo,

$$|4x + 4iy + 7| = 1 \Leftrightarrow (4x + 7)^2 + 16y^2 = 1 \quad \text{che ha per soluzioni}$$

tutti e soli i punti $w = x + iy$ la cui immagine nel

piano complesso si trova sulla circonferenza di centro

$$C\left(-\frac{7}{4}, 1\right) \text{ e raggio } r = \frac{1}{4}.$$



Conclusione: l'equazione è soddisfatta dai pt dell'asse x e dai pt della circonferenza C .