

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(07/02/2011)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = 2 \arctan(|e^x - 3|) - \log(|e^x - 1|)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{|1-x^4|}}$$

è integrabile negli intervalli $[0, 1[$, $]1, 2]$, $[2, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2\sqrt{x} \arctan(x)) - e^{x(\sqrt{1+x}-1)} + 1}{\sqrt{1+3x^{3/2}} - 1}.$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\log(x)}{(x-1)^2} dx.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^4 + \overline{w}^2 + w^2 - i\overline{w} = 0.$$

1. ID: $|e^x - 1| > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ID = $\mathbb{R}^*$ (1)

f non è né pari né dispari. Non riesce a studiare direttamente la positività. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \arctg 3 + \infty = +\infty$ $x = 0$ A.V.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \infty = -\infty \text{ as. os. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \arctg 3 \quad y = 2 \arctg 3 \quad \text{A.O. a } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \arctg(e^x - 3)}{x} - \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = -1$$

perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \arctg(e^x - 3) - \ln(e^x - 1) + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \arctg(e^x - 3) + \ln \frac{e^x}{e^x - 1} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \ln 1 = \pi$$

$y = -x + \pi$ Az. obliqua a $+\infty$

$$y' = \frac{2}{1 + |e^x - 3|^2} \cdot \frac{e^x - 3}{|e^x - 3|} \cdot e^x - \frac{1}{e^x - 1} = \begin{cases} e^x \left(\frac{2}{1 + (e^x - 3)^2} - \frac{1}{e^x - 1} \right) & \text{se } e^x > 3 \\ e^x \left(\frac{-2}{1 + (e^x - 3)^2} - \frac{1}{e^x - 1} \right) & \text{se } e^x < 3 \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \ln 3 \\ \frac{2}{1 + (e^x - 3)^2} > \frac{1}{e^x - 1} \end{cases} \vee \begin{cases} x < \ln 3, x \neq 0 \\ \frac{-2}{1 + (e^x - 3)^2} > \frac{1}{e^x - 1} \end{cases}$$

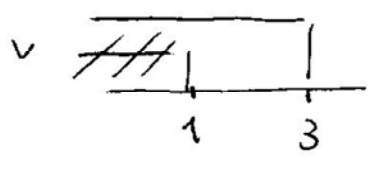
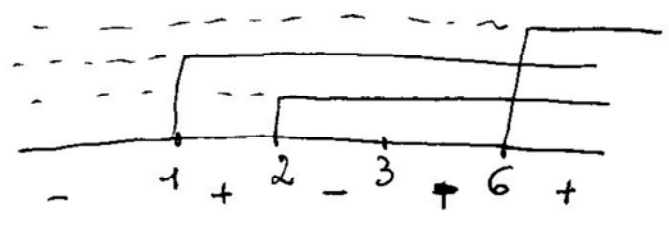
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x > 3 \\ \frac{2e^x - 2 - 1 - e^{2x} + 6e^x - 9}{(1 + (e^x - 3)^2)(e^x - 1)} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} e^x < 3, x \neq 0 \\ \frac{-2e^x + 2 - 1 - e^{2x} + 6e^x - 9}{(1 + (e^x - 3)^2)(e^x - 1)} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x > 3 \\ (e^{2x} - 8e^x + 12)(e^x - 1) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} e^x < 3, x \neq 0 \\ (e^{2x} - 4e^x + 8)(e^x - 1) < 0 \end{cases}$$

$$c_{\frac{x}{2}} = 4 \pm 2 = < \frac{2}{6}$$

$$\begin{cases} (e^x - 2)(e^x - 6)(e^x - 1) < 0 \\ e^x > 3 \end{cases}$$

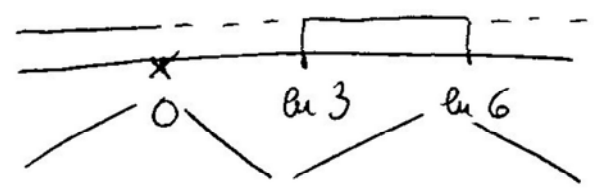
$$\vee \begin{cases} e^x < 1 \\ e^x < 3 \quad x \neq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} e^x < 1 \vee 2 < e^x < 6 \\ e^x > 3 \end{cases}$$

$$\vee e^x < 1 \Leftrightarrow 3 < e^x < 6 \vee e^x < 1$$

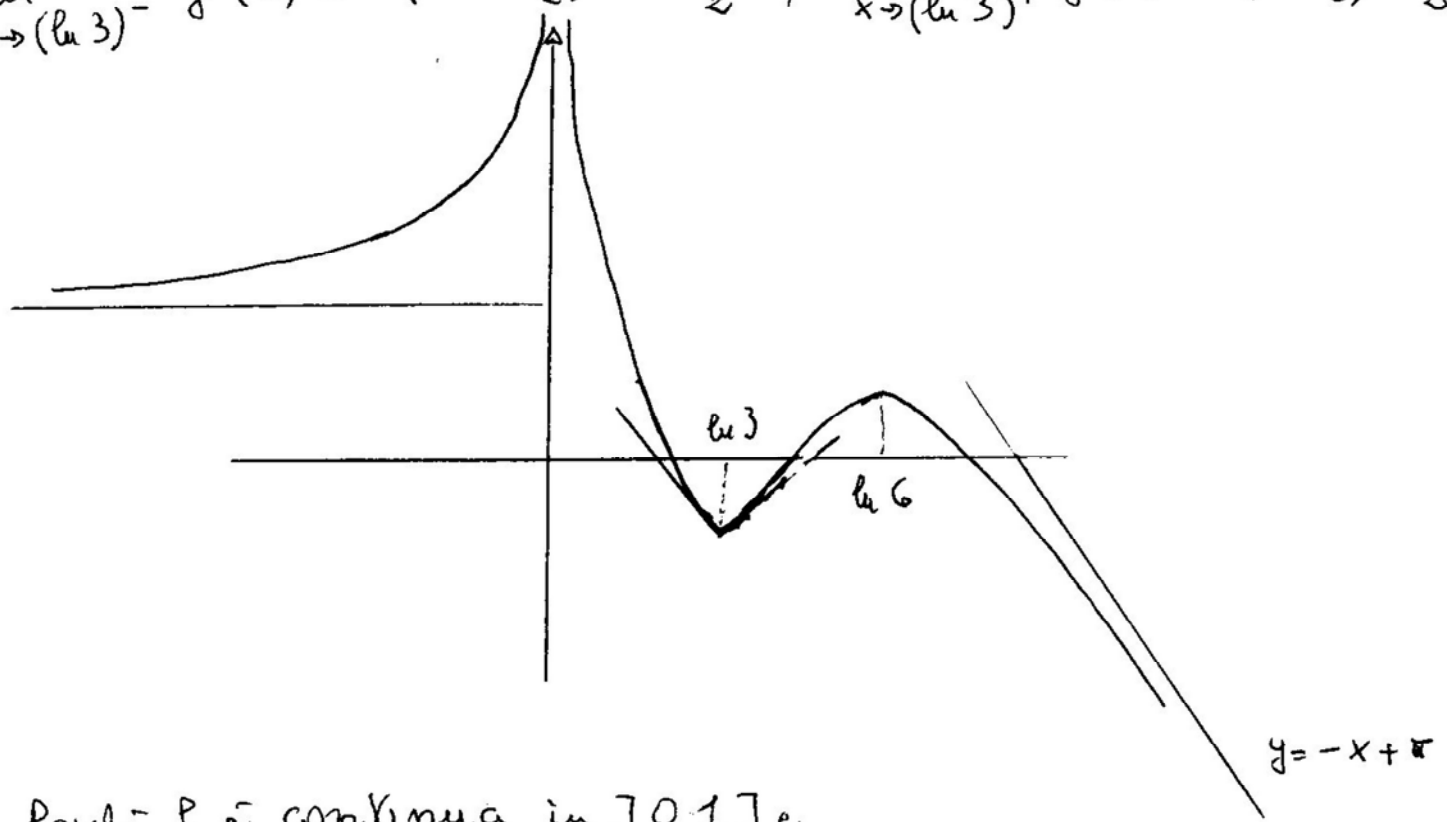
$$y' > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee \ln 3 < x < \ln 6$$



$$m \begin{cases} x = \ln 3 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \quad M \begin{cases} x = \ln 6 \\ y = 2 \text{ and } \ln 3 - \ln 2 \approx 2,5 - 1,6 = 0,9 \end{cases}$$

$x = \ln 3$ è anche pto angolare perché

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 3)^-} f'(x) = 3(-2 - \frac{1}{2}) = -\frac{15}{2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow (\ln 3)^+} f'(x) = 3(2 - \frac{1}{2}) = \frac{9}{2}$$



2. Poiché f è continua in $]0, 1[$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x} (1+x^2)} \\ &= +\infty \quad \text{con ordine } \frac{1}{2} \quad (\text{perché } \sqrt{1-x} \rightarrow 0 \text{ con ord. } \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

(3)

f è integrabile in s.i. in $[0, 1[$. In realtà f è continua in $]1, 2]$ e infinita di ordine $\frac{1}{2}$ anche per $x \rightarrow 1^+$ e quindi è integr. in s.i. in $]1, 2]$. Infine lo è anche in $[2, \infty)$ perché continua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{|1-x^4|}} = 0$ con ord $3 > 1$.

3. Poiché per $x \rightarrow 0^+$

$$\lg(1 + 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} x) - e^{x(\sqrt{1+x}-1)} + 1 \quad \text{ha ordine } \frac{3}{2}$$

essendo $\lg(1 + 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} x) \sim 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} x \sim 2\sqrt{x} \cdot x = 2x^{3/2}$

$$\text{e } e^{x(\sqrt{1+x}-1)} - 1 \sim x(\sqrt{1+x}-1) \sim x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{mentre } \sqrt{1+3x^{3/2}} - 1 \sim \frac{1}{2}(3x^{3/2}) \quad \text{ha ord. } \frac{3}{2}$$

segue che il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{3/2}}{\frac{1}{2}x^{3/2}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$4. \int \frac{\lg x}{(1-x)^2} dx = \int \left(D \frac{1}{1-x} \right) \lg x dx = \frac{1}{1-x} \lg x - \int \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{\lg x}{1-x} + \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \frac{\lg x}{1-x} + \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{\lg x}{1-x} + \lg \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$$

$$\left(\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=-1 \end{cases} \right.$$

5. Poiché $\bar{\omega}^2 = -(-\bar{\omega}^2) = -(i^2 \bar{\omega}^2) = -(i\bar{\omega})^2$ l'equazione diventa

$$\omega^4 - i^2 \bar{\omega}^2 + \omega^2 - i\bar{\omega} = 0 \Leftrightarrow (\omega^2 - i\bar{\omega})(\omega^2 + i\bar{\omega}) + \omega^2 - i\bar{\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - i\bar{\omega})(\omega^2 + i\bar{\omega} + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \omega = x+iy \\ x^2 - y^2 + 2xyi - ix - y + 1 = 0 \vee \end{matrix}$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi + ix + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=\pm \sqrt{3}/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$