

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(10/12/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x^2 - 1|^3$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \arctang\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

è integrabile negli intervalli $[-1, 0[,]0, 1], [1, \infty[$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(x^2) \sen(x) - \arcsen(x^2)(e^x - 1)}{\sen(x)(1 - \cos(x)) + \log(1 + x^2) \arctang(x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \arctang^2(x))^{\frac{1}{4}}}{\log(1 + x^2)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^4 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2.$$

Svolgimento

1. $D = \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

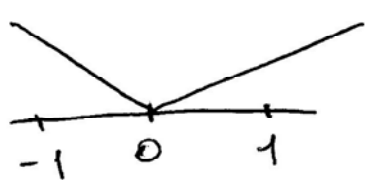
Poiché $f(x) = |x^2 - 1|^3 = |(x^2 - 1)^3|$ possiamo studiare la

$g(x) = (x^2 - 1)^3$ e poi prenderne il valore assoluto.

Poiché è un polinomio, $\nexists$ asintoti di alcun tipo.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g = +\infty$ $g'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \pm 1 \vee x = 0$ $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$



$\cup \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$

pti. e tangente
orizzontale per g

$g''(x) = 6[(x^2 - 1)^2 + 2x(x^2 - 1) \cdot 2x] = 2(x^2 - 1)(3x^2 - 1 + x^2)$

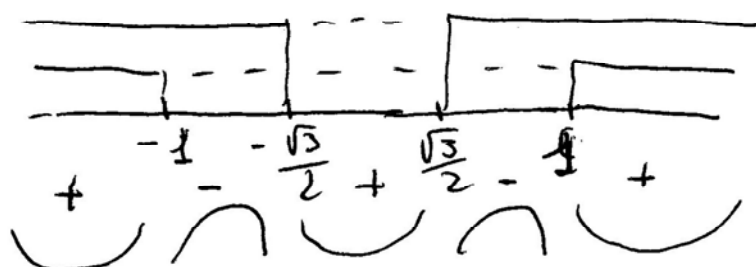
$g''(x) \geq 0$

$x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 3 \geq 0$

$x \leq -1 \vee x \geq 1$

$x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

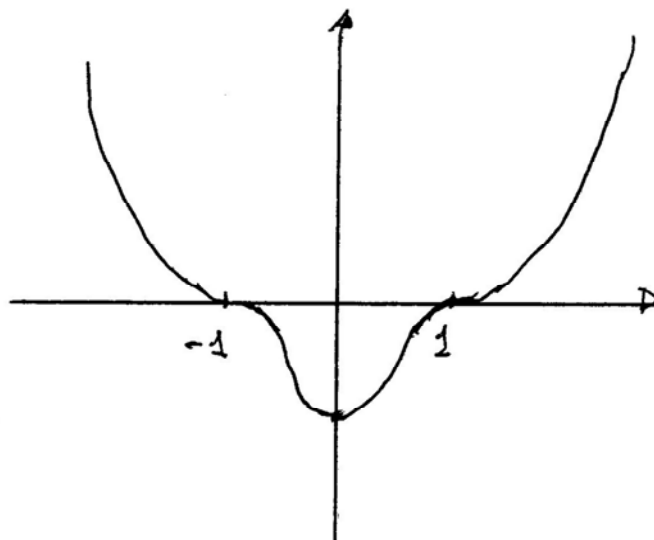


$x = \pm 1$

pti di flesso (a
tang. orizz.) per g

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

pti di flesso



$y = (x^2 - 1)^3$

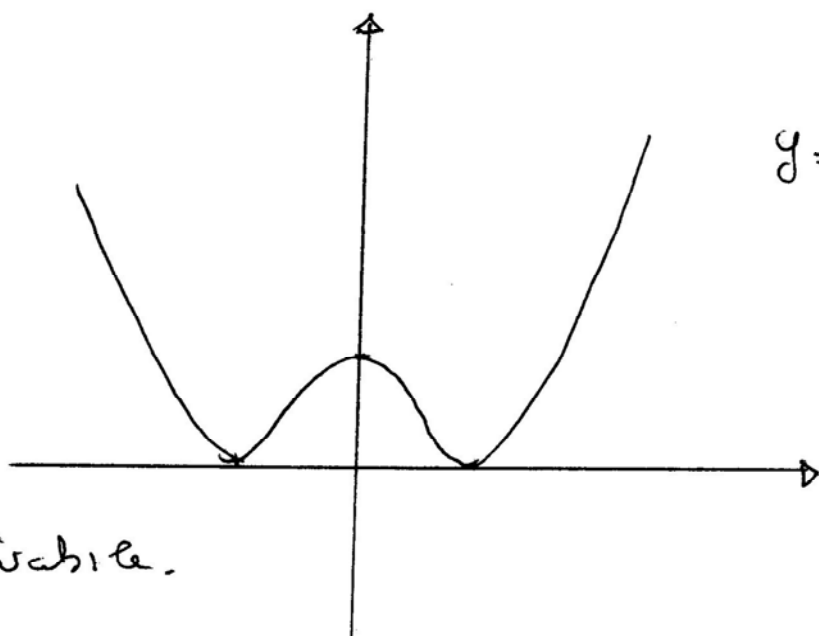
Poiché $g'(\pm 1) = 0$

anche $f'(\pm 1) = 0$

e cioè $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$ sono

pti di minimo

per f in cui f è derivabile.



2. f è continua in $[-1, 0[$, $]0, 1]$ e $[1, +\infty[$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = e^{-\infty} \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow f \text{ integ. in } [-1, 0[\text{ per la } \\ \text{limitata cui si prolunga per continuità}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = e^{+\infty} \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty \Rightarrow f \text{ non integ. in }]0, 1] \\ \text{perché infinito di ordine}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ integrabile in } [1, +\infty) \text{ per la } \\ \text{infinitesima di ordine } 2 > 1 \\ \text{essendo } \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

3. Si osserva che

$$\left. \begin{aligned} \arctan x^2 \cdot \sin x &\sim x^2 \cdot x = x^3 \\ \arcsin x^2 (e^x - 1) &\sim x^2 \cdot x = x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ord (Numeratore)} > 3$$

$$\left. \begin{aligned} \sin x (1 - \cos x) &\sim x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} x^3 \\ \lg(1 + x^2) \arctan x &= x^2 \cdot x = x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ord (Denominatore)} = 3$$

Segue che il limite in esame vale 0.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \operatorname{arctg}^2 x)^{\frac{1}{4}}}{\ln(1+x^2)} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} (1 - \operatorname{arctg}^2 x)^{-\frac{3}{4}} (-\frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2})}{\frac{2x}{1+x^2}} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{arctg}^2 x)^{-\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{2x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(1 - \operatorname{arctg}^2 x)^{-\frac{3}{4}}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\downarrow 1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$5. \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2} \right)^2 = \left(\frac{1+i^2+2i}{2} \right)^2 = i^2 = -1$$

$$\omega^4 = -1 \Rightarrow \omega = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} =$$

$$= \left\{ \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \mid k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

$$\omega_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_2 = -\omega_0 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\omega_3 = -\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$