

# COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(04/10/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos \left( \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(\arctang(x) + \cos(x))}{e^x - 1}$$

è integrabile negli intervalli  $]0, 1]$ ,  $[1, \infty[$ .

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(x) - e^{\sqrt{x}} + \cos(\arcsen(x))}{e^{\sen(x)} - \cos(\sqrt{x})}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen(e^x - 1) + \log(1 + \arctang(x))}{\cos(\sen(x)) - 1 + e^{\sen(x)} - 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 = i(\operatorname{Im}(w))^2 + |w|.$$

# Svolgimento

$$1. -1 \leq \left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 - 1 \leq 0 \\ 2x + x^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ID = \mathbb{R} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Perché  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  studio  $f$  solo per  $x \geq 0$   
e poi ne ribatte il grafico rispetto all'asse  $y$

$$y=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x=1$$

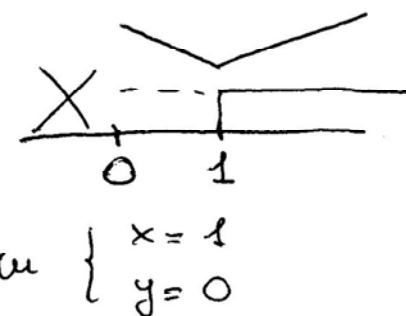
$y \geq 0 \quad \forall x$  perché la funzione arcocoseno è sempre  $\geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{2x}{x^2+1} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \quad y = \frac{\pi}{2} \text{ as. orizz.}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{\cancel{x^2+1}}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = -2 \frac{1-x^2}{|1-x^2|(x^2+1)}$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{x^2+1} & \text{se } 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x^2+1} & \text{se } 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2+1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2}{x^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$



$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{1+x^2} = -2$$

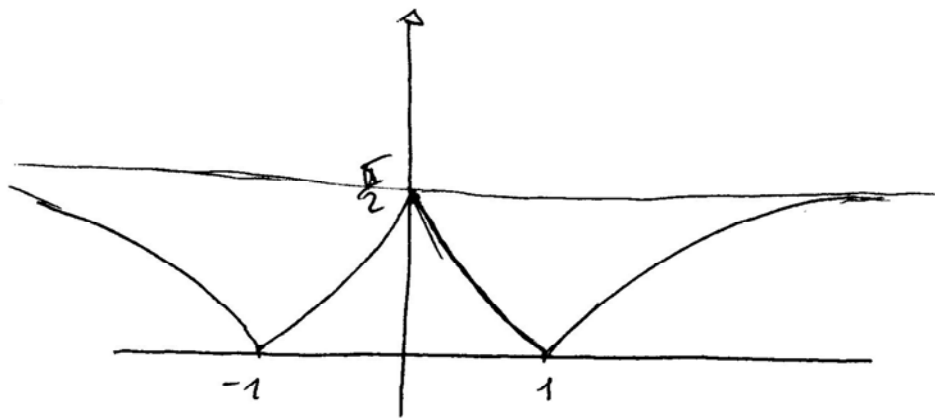
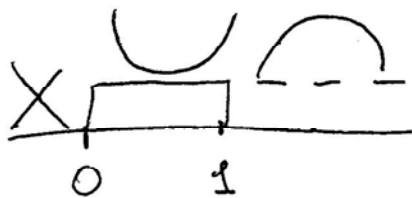
$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$  pto angolare perché  $f$  è pari

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y' = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \pm \frac{2}{x^2+1} = \pm 1$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$  pto angolare

$$y'' = \begin{cases} \frac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$



2.  $f$  è continua in  $]0,1] \cup [1,+\infty)$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(\operatorname{arctg} x + \cos x)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\operatorname{arctg} x + 1 + \cos x - 1)}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{x^3}{6}}{x} = 1$$

perché per  $x \rightarrow 0$   $e^x - 1 \sim x$

$$\lg(1 + \operatorname{arctg} x + \cos x - 1) \sim \operatorname{arctg} x + \cos x - 1 \sim x - \frac{x^2}{2}$$

mentre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(\operatorname{arctg} x + \cos x)}{e^x - 1} = 0$  con ord. molto grande

perché il numeratore è limitato e il denominatore

tende a  $+\infty$  molto velocemente

Segue che  $f$  è integrabile su  $]0,1]$  perché converge

su  $[1,+\infty)$  perché  $\rightarrow 0$  con ordine  $\geq x > 1$ .

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - e^{\sqrt{x}} + \cos(\operatorname{arcsen} x)}{e^{\operatorname{sen} x} - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 - \sqrt{x} + 1 - \frac{x^2}{2}}{1 + x - 1 + \frac{x}{2}} =$$

$$\left( \begin{array}{lll} \operatorname{arctg} x \sim x & e^{\sqrt{x}} \sim 1 + \sqrt{x} & \cos(\operatorname{arcsen} x) \sim 1 - \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2} \\ e^{\operatorname{sen} x} \sim 1 + \operatorname{sen} x \sim 1 + x & \cos \sqrt{x} \sim 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} & \sim 1 - \frac{x^2}{2} \end{array} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{x}}{\frac{3}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Si noti che si tratta di un limite destro perché  $\sqrt{x}$  è definita solo per  $x \geq 0$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) + \lg(1 + \arcsin x)}{\cos(\sin x) - 1 + e^{\sin x} - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - 1) \cdot e^x + \frac{1}{1 + \arcsin x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}}{-\sin(\sin x) \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot \cos x} = \frac{1+1}{0+1} = 2$$

$$5. \omega^2 = i(\operatorname{Im} \omega)^2 + |\omega| \quad \omega = x + iy$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = i y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2xy = y^2 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(y - 2x) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \sqrt{x^2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 4x^2 = \sqrt{x^2 + 4x^2} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = |x| \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2x \\ -3x^2 = \sqrt{5x^2} \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x < 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \vee x = 1 \quad x = 0 \vee x = -1$$

$$(\Rightarrow) \omega = \pm 1 \vee \omega = 0.$$