

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(20/09/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x|(\log(|x|) + 1)^2$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)x^x}{\arctan^2(x) + e^{x^2} - 1}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - e^{\arcsin(x)} + 1}{\sin(\arctan(x)) + \cos(\sqrt{x}) - 1}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \arctan(x^2)}{(\log(1 + x^2) + 1 - \cos(x))e^{2x}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{1 + iw}{1 - iw} \right)^2 = 1.$$

Soluzioni

1. $ID = \mathbb{R}^*$ Poiché f è pari, basta studiarla per $x > 0$ e ribaltarne poi il grafico rispetto all'asse y

$$f(x) = x (\lg x + 1)^2 \quad x > 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lg x = -1$$

N.d.A. $x = e^{-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0 \text{ per gli ordini}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

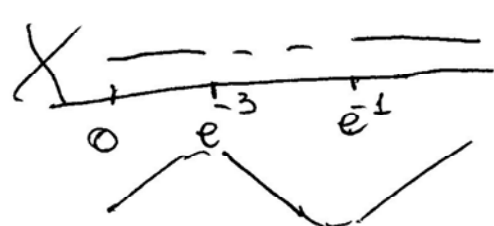
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lg x + 1)^2 = +\infty \text{ Sta da alcuni tipi}$$

$$y' = (\lg x + 1)^2 + 2x(\lg x + 1) \cdot \frac{1}{x} = (\lg x + 1)(\lg x + 3) \quad x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = +\infty$$

Per $x \rightarrow 0^+$ f tende a 0 con l'aspetto verticale.

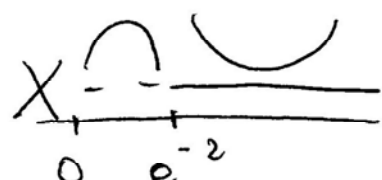
$$y' > 0 \Leftrightarrow \lg x < -3 \vee \lg x > -1 \Leftrightarrow x < e^{-3} \vee x > e^{-1}$$

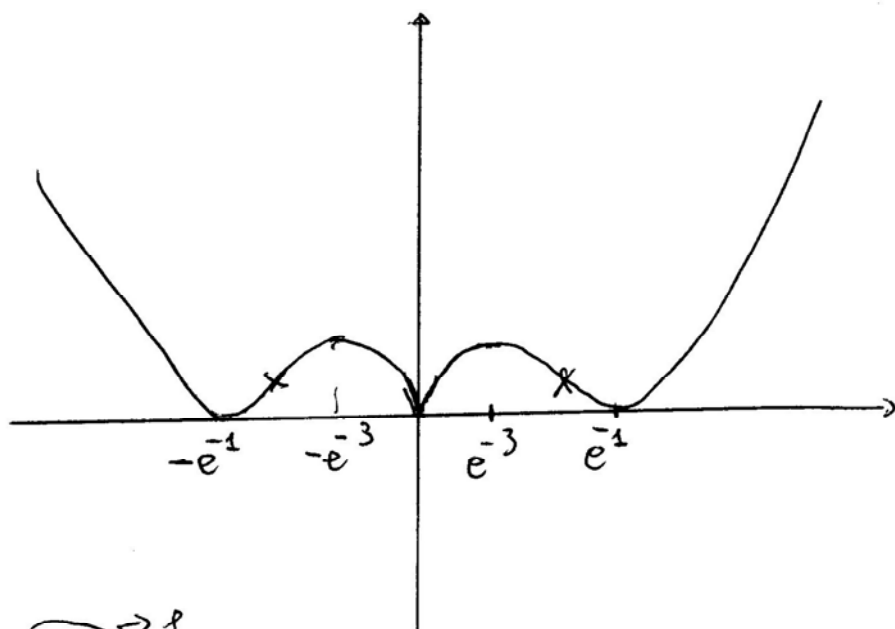
$$M \begin{cases} x = e^{-3} \\ y = e^{-3}(-3+1)^2 = \frac{4}{e^3} \end{cases} \quad m \begin{cases} x = e^{-1} \\ y = 0 \end{cases}$$


$$y'' = \frac{1}{x} (\lg x + 3 + \lg x + 1)$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \lg x > -2$$

$$x > e^{-2}$$





2. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cdot e^{x \lg x}}{\arctg^2 x + e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^1}{x^2 + \frac{x^4}{2}} = +\infty$ con ordine 1

f non è i -integrabile in $[0, 1]$ mentre è i -integrabile in $[1, +\infty)$ perché

continua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x \cdot e^{x \lg x}}{\arctg^2 x + e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\lg x - x)}{\sin x \cdot e^{x^2}} = 0$

con ordine grande e quindi > 1 .

3. Poiché $\arctg(\operatorname{sen} x) \sim \operatorname{sen} x \sim x$ per $x \rightarrow 0$
 $e^{\operatorname{arcsen} x} - 1 \sim \operatorname{arcsen} x \sim x$

il numeratore ha ordine > 1 essendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(\operatorname{sen} x) - e^{\operatorname{arcsen} x} + 1}{x} = 0$

mentre il denominatore ha ordine $= 1$ poiché

$\operatorname{sen}(\arctg x) \sim \arctg x \sim x$ $\cos \sqrt{x} - 1 \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2}$ e quindi

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\arctg x) + \cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x}{2}}{x} = \frac{3}{2} \neq 0.$

Segue perciò che il limite studiato vale 0.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \arctg x^2}{(\lg(1+x^2) + 1 - \cos x) e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{2x}} \cdot \frac{e^x - 1 + \arctg x^2}{\lg(1+x^2) + 1 - \cos x} \rightarrow \frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}{\left(\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + \operatorname{sen} x\right) e^{2x}} = \frac{1}{0} \nexists$ (applico l'Hospital solo a $\frac{0}{0}$; trattando e^{2x})

Poiché se $x \rightarrow 0^+$ $\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{sen} x > 0$ il limite destro è $+\infty$
 se $x \rightarrow 0^-$ $\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{sen} x < 0$ il limite sinistro è $-\infty$

5. $\left(\frac{1+i\omega}{1-i\omega}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1+i\omega}{1-i\omega} = \sqrt{1} = \pm 1 \Leftrightarrow$

$1+i\omega = 1-i\omega \vee 1+i\omega = -1+i\omega \Leftrightarrow$

$2i\omega = 0 \vee 1 = -1 \Leftrightarrow \omega = 0$
 $\omega = 0$ $\emptyset$