

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(19/07/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{e^x}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \log(1+x)}{\cos(x) - 1 + \frac{e^x - 1}{2}}.$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(\sqrt{x}))}{\cos(\sqrt{x}) - \cos(e^x - 1)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x))}{e^{\sin(x)} - 1 - \arctan(\log(1+x) \sin(x))}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 = i(\operatorname{Re}(w))^2 + |w|.$$

Svolgimento

(1)

1. I.D. $\frac{x^2+4x+4}{e^x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2 \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{e^x}} = \sqrt{\frac{+\infty}{+\infty}} = 0$ per gli ordini $y=0$ as. o. b. a $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{e^x}} = \sqrt{\frac{+\infty}{0^+}} = +\infty$ as. o. b. a $-\infty$

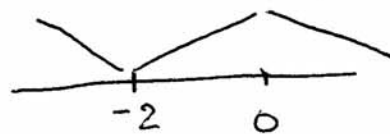
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{e^x}} = +\infty$ as. o. b. a $-\infty$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x+2)^2}{e^x}}} \cdot \frac{(2x+4)e^x - (x^2+4x+4)e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^x}{(x+2)^2}} \cdot \frac{-x^2-2x}{e^x}$

$y' = \frac{-x(x+2)}{2|x+2|\sqrt{e^x}} = \begin{cases} -\frac{x}{2\sqrt{e^x}} & x+2 > 0 \\ \frac{x}{2\sqrt{e^x}} & x+2 < 0 \end{cases} \quad \text{I.D.}(y') = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y' = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{2\sqrt{e^x}} = -\frac{1}{2}e$ $f'_-(-2) = -e$ $x=-2$ pto
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} y' = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x}{2\sqrt{e^x}} = \frac{1}{2}e$ $f'_+(-2) = e$ angoloso

$y' > 0 \Leftrightarrow -x^2-2x > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0.$

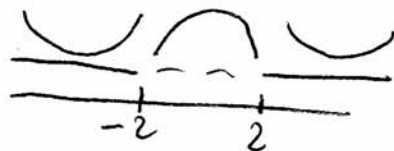


$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ min $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ max

$y'' = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{e^x}(1-\frac{x}{2}) & x > -2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{e^x}(1-\frac{x}{2}) & x < -2 \end{cases}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ 1-\frac{x}{2} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \\ 1-\frac{x}{2} > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$



2. Poiché $\sin x \sim x$, $\lg(1+x) \sim x$, $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$,
 $e^x - 1 \sim x$ f è integrabile in $]0,1]$ perché continua e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+x}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}} = 4 \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1+x)}{\frac{1}{2}e^x} = 0$ con ordine molto
 grande e quindi $\alpha > 1$, f è integrabile in s. i. in $[1, +\infty)$.

3. Poiché per $x \rightarrow 0^+$

$$\lg(\cos \sqrt{x}) = \lg(1 + \cos \sqrt{x} - 1) \sim \cos \sqrt{x} - 1 \sim -\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = -\frac{1}{2}x$$

$$\cos(\sqrt{x}) - \cos(e^x - 1) = \cos(\sqrt{x}) - 1 + 1 - \cos(e^x - 1) \sim -\frac{1}{2}x + (e^x - 1)^2 \sim -\frac{1}{2}x + x^2$$

$$\text{il limite diventa } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x}{-\frac{1}{2}x} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) \cos x}{e^{\sin x} \cdot \cos x - \frac{1}{\lg^2(1+x) \sin^2 x + 1} \cdot \left(\frac{1}{1+x} \sin x + (\lg(1+x)) \cos x \right)} = 1$$

5. Posto $z = x + iy$ l'equazione diventa

$$(x+iy)^2 = ix^2 + \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ 2xy = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ x=0 \vee x=2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y^2 = \sqrt{y^2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2y \\ 4y^2 - y^2 = \sqrt{5y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 + |y| = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2y \\ 3y^2 = \sqrt{5}|y| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y \geq 0 \\ y(y+1)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y < 0 \\ y(y-1)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2y \\ y \geq 0 \\ y(3y-\sqrt{5})=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2y \\ y < 0 \\ y(3y+\sqrt{5})=0 \end{cases}$$

$$z_0: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad z_1: \begin{cases} x=2\frac{\sqrt{5}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \quad z_2: \begin{cases} x=-2\frac{\sqrt{5}}{3} \\ y=-\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$