

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(05/07/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x-1|}{1 - \log(x-1)}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1 + \arctang(x^2)}{(\log(1+x^2) + 1 - \cos(x))e^{2x}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(x)) - \arcsen(\arctang(x))}{e^{x^2} - 1 + \sin(\arctang(\arcsen(x)))}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - e^{\sin(x)} + \cos(\arctang(x))}{\arctang(\log(1+x))}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$4w^2 = \overline{w}^4.$$

Svolgimento

$$1. \begin{cases} (x-1) > 0 \\ 1 - \lg(x-1) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \lg(x-1) \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x-1 \neq e \end{cases} \quad x \neq e+1$$

$$ID =]1, 1+e[\cup]1+e, +\infty) \quad \text{Basta studiare } f(x) = \frac{x-1}{1-\lg(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{0}{+\infty} = 0 \quad \text{e prolungabile per continuit  in } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow (1+e)^+} f(x) = \frac{e}{0^+} = +\infty \quad \text{essendo } 1 - \lg(x-1) > 0 \Leftrightarrow \lg(x-1) < 1 \\ x-1 < e \Leftrightarrow x < 1+e$$

$$x = 1+e \quad \text{ca. vert. as. e sim. as.}; \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 1+e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty \quad \text{per gli ordini } \neq \text{ ca. ob.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x}}_1 \cdot \frac{1}{1-\lg(x-1)} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{ca. ob.}$$

$$y' = \frac{1 - \lg(x-1) + (x-1) \frac{1}{x-1}}{(1 - \lg(x-1))^2} = \frac{2 - \lg(x-1)}{(1 - \lg(x-1))^2} \quad \forall x \in ID$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow 2 > \lg(x-1) \Leftrightarrow x-1 < e^2 \Leftrightarrow x < e^2 + 1$$

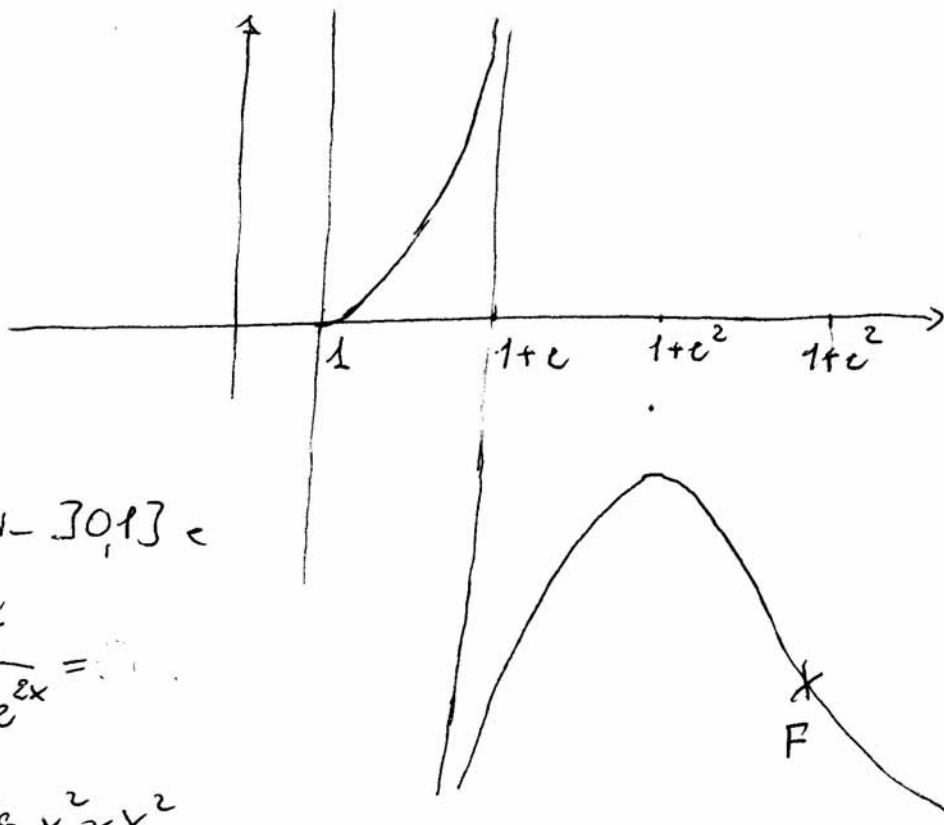
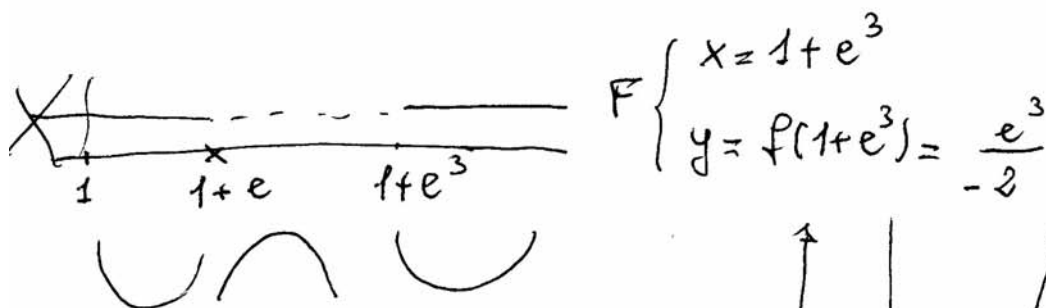
$$\begin{array}{c} \text{X} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{1} \quad \text{1+e} \quad \text{1+e}^2 \end{array} \quad M \begin{cases} x = 1+e^2 \\ y = \frac{e^3}{1-\lg e^2} = -e^{-2} \end{cases}$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x-1} (1 - \lg(x-1))^3 - (2 - \lg(x-1)) \cdot 2(1 - \lg(x-1)) \left(-\frac{1}{x-1}\right)}{(1 - \lg(x-1))^4}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow (1 - \lg(x-1))(-1 + \lg(x-1) + 4 - 2\lg(x-1)) > 0$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow (1 - \lg(x-1))(3 - \lg(x-1)) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lg(x-1) < 1 \vee \lg(x-1) > 3 \Leftrightarrow x < 1+e \vee x > 1+e^3$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f' = \frac{+\infty}{+\infty} \approx 0$$

(per gli ordini)

2. Poiché f è continua in $[0, 1]$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x^2}{(x^2 + \frac{x^2}{2})e^{2x}} = 0$$

essendo $e^x - 1 \sim x$, and $x^2 \sim x^2$
 $\lg(1+x^2) \sim x^2$, $1 + \ln x \sim \frac{x^2}{2}$

per $x \rightarrow 0$, f non è l.r. in s.l.p. in $[0, 1]$.

Poiché f è continua in $[1, +\infty)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(\lg(1+x^2) + 1 - \ln x)e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\lg(1+x^2))e^x} = 0$$

con ordine grande e quindi $\alpha > 1$, $f \in l_{\text{reg}}$ in s. imp. in $[1, +\infty)$.

3. Per di $\lg(1+\operatorname{sen} x) \sim \operatorname{sen} x \sim x$

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x) \sim \operatorname{arctg} x \sim x$$

se $x \rightarrow 0$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(\operatorname{arcsen} x)) \sim \operatorname{arctg}(\operatorname{arcsen} x) \sim \operatorname{arcsen} x \sim x$$

il limite diventa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^2 + x} = 0$ (al numeratore ho
infinitesimo di ord > 1
al denominatore ho
infinitesimo di ord $= 1$)

4. Applicando Ten di de e' Hopital a ho:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x - \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\lg^2(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x}} = \frac{1-1+0}{1 \cdot 1} = 0$$

5. Posto $w = x + iy$ l'eq. diventa $4(x+iy)^2 = (x-iy)^4 \Leftrightarrow$

$$4x^2 - 4y^2 + 8xyi = (x^2 - y^2 - 2xyi)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4y^2 + 8xyi = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 - 4(x^2 - y^2)xyi \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ 8xy = -4(x^2 - y^2)xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ xy(x^2 - y^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -4y^2 = y^4 \\ y^2(y^2+4)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ 4x^2 = x^4 \\ x^2(x^2-4)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ -8 = 4 - 4x^2y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=0 \vee \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ x^2y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2 - 2 \\ y^4 - 2y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad y^2 = \frac{1 \pm 2}{2} = \begin{matrix} -1 \text{ N.A.} \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y = \pm \sqrt{3} \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Le sol. sono $z_1 = 0$, $z_2 = \pm 2$, $z_3 = \pm 1 \pm \sqrt{3}i$, $z_4 = \pm 1 \mp \sqrt{3}i$.