

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(07/04/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + x + 1) - |x^2 + x|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x) - e^x + \cos(x)}{\arctan(x)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - e^{\arcsin(\arctan(x))}}{\cos(\arctan(x)) - 1 + (e^x - 1) \log(1 + x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x) \log(1 + x)) + \log(1 + \sin(x))}{\sin(x)(1 - \cos(x)) \arctan\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$4\bar{w}^2 = w^4.$$

Svolgimento

$$1. \quad x^2 + x + 1 > 0 \quad \Delta < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad I.D = \mathbb{R} \quad \text{As. Serp.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \lg(x^2 + x + 1) - |x^2 + x| = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} -x^2 = -\infty \quad \text{As. 02532.}$$

per gli ordini

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-x^3}{x} = \mp \infty \quad \text{As. obliqua}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ \lg(x^2 + x + 1) = |x^2 + x| \end{cases}$$

Non possiamo studiare direttamente l'eq. $f(x) = 0$ e la diseq. $f(x) > 0$. Dedurremo le intersezioni con l'asse y e la positività dal grafico finale

Studio della derivata prima

$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{x^2+x}{|x^2+x|} (2x+1) = (2x+1) \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x^2+x}{|x^2+x|} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0, -1$$

$$y' = \begin{cases} -\frac{(2x+1)(x^2+x)}{x^2+x+1} & x < -1 \vee x > 0 \\ \frac{(2x+1)(x^2+x+2)}{x^2+x+1} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y' = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(2x+1)(x^2+x+2)}{x^2+x+1} = -2$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-1) &= -2 \\ f'_-(-1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ pto angolare}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y' = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{(2x+1)(x^2+x)}{x^2+x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2x+1)(x^2+x+2)}{x^2+x+1} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= 2 \\ f'_+(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ pto angolare}$$

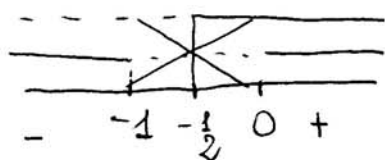
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{(2x+1)(x^2+x)}{x^2+x+1} = 0$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ -\frac{(2x+1)(x^2+x)}{x^2+x+1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{(2x+1)(x^2+x+2)}{x^2+x+1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ (2x+1)(x^2+x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ (2x+1)(x^2+x+2) > 0 \end{cases}$$

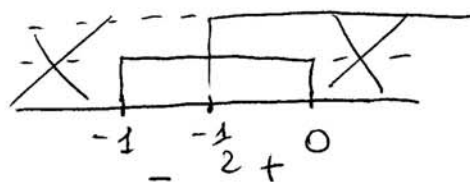
$$2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$x^2+x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$$



$$2x+1 > 0 \quad x > -\frac{1}{2}$$

$$x^2+x+2 > 0 \quad \Delta < 0 \quad \forall x$$

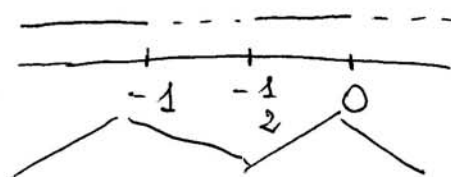


$$x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < 0$$

Conclusione: $y' > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < 0$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < -\frac{1}{2} \vee x > 0$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$



f $\nearrow$ crescente in $]-\infty, -1[$ e in $]-\frac{1}{2}, 0[$

f $\searrow$ decrescente in $]-1, -\frac{1}{2}[$ e in $]0, +\infty[$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{pto di max rel.}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{pto di max rel.}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \lg \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{pto di min. rel.}$$

Studio della derivata seconda

$$y'' = 2 \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x^2+x}{|x^2+x|} \right) + (2x+1) \left(\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \right) \quad \forall x \neq 0, -1$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{2}{x^2+x+1} - 2 - \frac{(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{2(x^2+x)}{x^2+x+1} - \frac{(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} & x < -1 \vee x > 0 \\ 2 \left(\frac{1}{x^2+x+1} + 1 \right) - \frac{(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2+x+2)(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $y'' < 0$ se $x < -1 \vee x > 0$

$$\text{Se } -1 < x < 0: y'' > 0 \Leftrightarrow 2[(x^2+x)^2 + 3(x^2+x) + 2] - (2x+1)^2 > 0 \quad 3$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 4x^3 + 2x - 5 > 0 \quad \text{non verificata}$$

(se $-1 < x < 0$ l'unico pezzo positivo $2x^4$ non può "vincere" sui pezzi negativi perché $0 < 2x^4 < 2$ se $x \in]-1, 0[$)

Dunque: $y'' < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq -\frac{1}{2}$

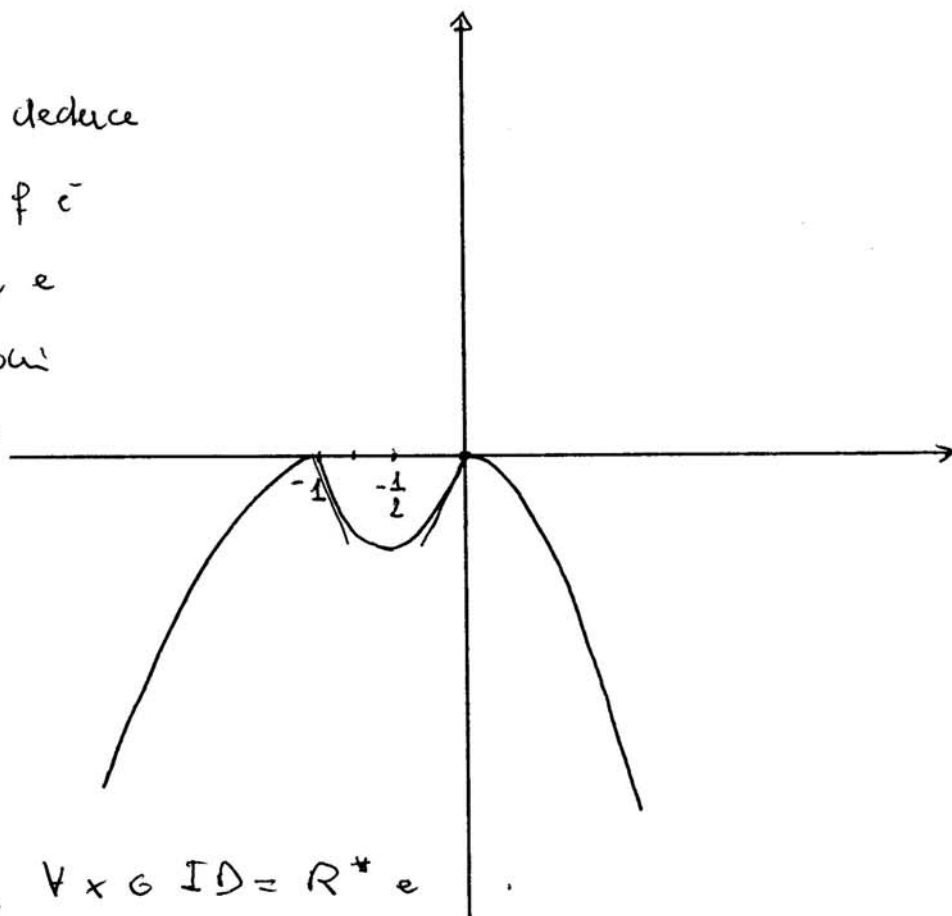


f è concava in $(-\infty, -1[$, in $] -1, 0[$ e in $]0, +\infty)$.

N.B. A posteriori si deduce

dal grafico che f è

- sempre negativa e
- ha due intersezioni con l'asse x sono $(-1, 0)$ e $(0, 0)$.



2. f è continua $\forall x \in ID = \mathbb{R}^*$ e
quindi lo è in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + \cos x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{1} + \frac{1 - \cos x}{x} \xrightarrow{0} - \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{1}}{\frac{\arctan x}{x} \xrightarrow{1}} = 0$$

f è integrabile (in senso classico) in $]0, 1]$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - e^x + \cos x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{\arctan x} = \frac{-\infty}{\frac{\pi}{2}} = -\infty$$

con ordine grande, e quindi > 1 , f non è integrabile in $[1, +\infty)$.

3. Poidi

$$\cos(\operatorname{arcsen}(x)) - e^{\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg}(x))} = \cos(\operatorname{sen} x) - 1 + 1 - e^{\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg}(x))}$$

$$\approx -\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg}(x)) \approx -\frac{x^2}{2} - x \approx -x,$$

$$\cos(\operatorname{arctg}(x)) - 1 + (e^x - 1) \lg(1+x) \approx -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + x \cdot x \approx -\frac{1}{2} x^2 + x^2 = \frac{1}{2} x^2$$

il limite proposto diventa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\frac{1}{2} x^2} \nexists$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} -\frac{1}{x} = \mp \infty$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x \cdot \lg(1+x)) + \lg(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x (1-\cos x) \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x \cdot \lg(1+x) + \frac{\operatorname{sen} x}{1+x}}{1 + \operatorname{sen}^2 x \lg^2(1+x)} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}}{\cos x (1-\cos x) \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x (1-\cos x) \frac{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}{1 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x \cdot \lg(1+x) + \frac{\operatorname{sen} x}{1+x}}{1 + \operatorname{sen}^2 x \cdot \lg^2(1+x)} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}}{\underbrace{(\cos x (1-\cos x) + \operatorname{sen}^2 x)}_{0^+} \underbrace{\operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sen} x}}_{\pm \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x \cos x (1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x + 1}}_{0^\pm}} = \frac{1}{0^\pm} \nexists \end{aligned}$$

(il denominatore cambia segno vicino 0 perché cambiamo segno $\operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ e $-\operatorname{sen} x$)

$$5. w = x + iy \quad \bar{w} = x - iy \quad 4(x - iy)^2 = (x + iy)^4$$

$$4x^2 - 4y^2 - 8xyi = (x^2 - y^2 + 2xyi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4y^2 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2 y^2 \\ -8xy = 2xy(x^2 - y^2) \end{cases}$$

Dalla 2^a eq. si ha $xy(x^2 - y^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0 \vee x^2 = y^2 - 4$

$$\text{Sostituendo nella 1^a: } \begin{cases} x = 0 \\ -4y^2 = y^4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 = x^4 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = y^2 - 4 \\ -16 = \frac{16}{4} - 4(y^2 - 4)y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Le sol. sono } w_1 = 0, w_2 = \pm \sqrt{2}, w_3 = \pm (\sqrt{12} - 2) \pm (2 + \sqrt{12})i, \\ &\text{in tutto 7 } w_{6,7} = \pm (\sqrt{12} - 2) \mp (2 + \sqrt{12})i \end{aligned}$$