

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(19/02/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x \log(|x|)}{1 + \log^2(|x|)}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\arctang(x) - \log(1+x)}{x^{\frac{3}{2}} + \sin^2(x) + \sqrt{x}}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(e^x - 1)) - \frac{x^2}{2}}{e^{\cos(x)} - e}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)x^x}{\arctang^2(x) + e^{x^2} - 1}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 = \operatorname{Re}(w) + i(\operatorname{Im}(w))^2 - |w|.$$

Svolgimento

1. ID $|x| > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f(-x) = -f(x) \quad f \text{ dispari}$

Studio f per $x > 0$ e poi ribalto f rispetto all'origine.

$$f(x) = \frac{x \lg x}{1 + \lg^2 x} \quad x > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \lg x}{1 + \lg^2 x} = \frac{0}{\infty} = 0 \quad f \text{ prolungab. per continuit  in } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \lg x}{1 + \lg^2 x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \quad \text{per gli ordini as. vert.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x}{1 + \lg^2 x} = 0 \quad \text{per gli ordini as. obl. ne obl. qua}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow x \lg x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (1, 0) \text{ intersezione con asse } x$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \lg x > 0 \quad x > 0 \quad \lg x > 0 \rightarrow x > 1$$

$$f > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

$$f < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$f'(x) = \frac{(\lg x + x \cdot \frac{1}{x})(1 + \lg^2 x) - x \lg x \cdot 2 \lg x \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \lg^2 x)^2} = \frac{\lg^3 x - \lg^2 x + \lg x + 1}{(\lg^2 x + 1)^2}$$

Non si pu  studiare direttamente la disuguaglianza $f'(x) > 0$

perci  uso metodo grafico. Posto $\lg x = t$

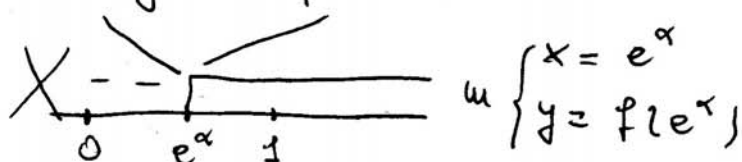
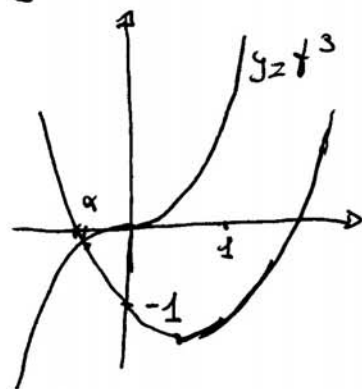
$$t^3 - t^2 + t + 1 > 0 \Leftrightarrow t^3 > t^2 - t - 1$$

$$y = t^2 - t - 1 \quad \text{parabola di vertice } V(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$$

e intersezioni con gli assi $(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 0), (0, -1)$

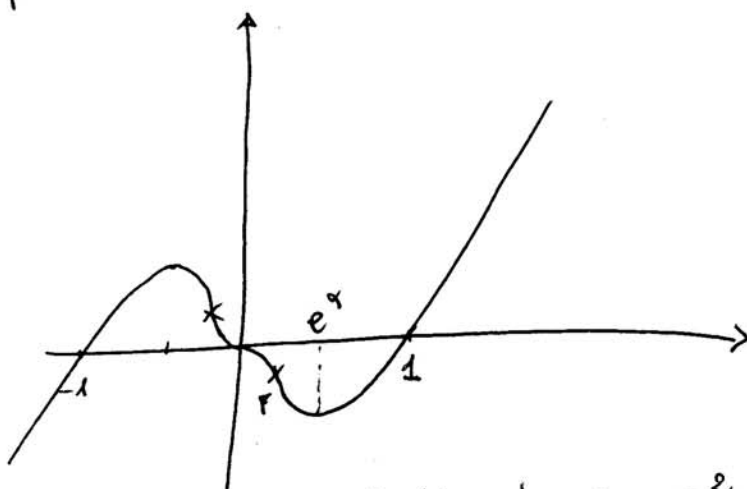
Dunque $\exists \alpha \in]\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0[$ e la dis.  

soddisfatta per $t > \alpha \Leftrightarrow x > e^\alpha$ con $e^\alpha \in]0, 1[$.



Si osserva che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \lg x = t}} \frac{t^3 - t^2 + t + 1}{(t^2 + 1)^2} = 0$ (2)

dunque f parte dall'origine con tangente orizzontale e quindi risolta verso il basso e presenta un flesso tra 0 e e^x . Si potrebbe studiare il segno della derivata seconda usando ancora il metodo grafico, ma comunque non si trovano altri flessi dopo il pto di minimo.



2. Poiché $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ segue che per il principio di sostituzione degli infinitesimi

si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2}}{x^{3/2} + x^2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}} = 0$

Poiché f è continua in $]0, 1]$ e convergente a 0, è integrabile in senso classico in $]0, 1]$.

Inoltre per il principio di sostituzione degli infiniti si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\lg(1+x)}{x^{3/2}} = 0 \quad \text{con ordine} < \frac{3}{2}$$

$> \frac{3}{2} - \varepsilon \quad \forall \varepsilon$
piccolo

e quindi preso $\varepsilon > 1$, $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$ segue che f è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ poiché continua e infinitesime di ordine $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$.

3. Poiché

$$\lg(\cos(e^x-1)) = \lg(1 + \cos(e^x-1) - 1) \sim \cos(e^x-1) - 1 \sim$$

$$\sim -\frac{1}{2}(e^x-1)^2 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$e^{\cos x} - e = e(e^{\cos x - 1} - 1) \sim e(\cos x - 1) \sim -\frac{1}{2}e x^2$$

segue che il numeratore è un infinitesimo di ordine > 2 mentre il denominatore ha ordine 2 e quindi il limite vale 0.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x) x^x}{\operatorname{arctg}^2 x + e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x) \cdot e^{x \lg x}}{\operatorname{arctg}^2 x + e^{x^2} - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overset{\rightarrow 1}{\cos x} \cdot \overset{\rightarrow 1}{e^{x \lg x}} + \overset{\rightarrow 0}{\sin x} \cdot \overset{\rightarrow 0}{e^{x \lg x}} (\overset{\rightarrow 1}{\lg x + 1})}{\underbrace{\frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} + 2x e^{x^2}}_{\rightarrow 0}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

N.B. si tratta di un limite per $x \rightarrow 0^+$ perché 0 è di accumulazione solo a destra. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot e^{x \lg x} (\lg x + 1) = 0 \quad \text{perché per gli ordini}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \lg x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lg x = 0$$

5. Posto $w = x + iy$ l'eq. diventa: $x^2 + y^2 + 2xyi = x + iy^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2xy = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x - |x| \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 4x^2 = x - \sqrt{5x^2} \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x < 0 \\ x^2 = 2x \end{cases} \vee \begin{cases} 3x^2 + x - \sqrt{5}|x| = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{L'eq. ha 3 sol.}$$

$$w = 0, \quad w = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{3} + i \frac{\pm \sqrt{5}-1}{3}$$

$$x = y = 0 \vee \emptyset \vee x = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad y = 2(\pm \frac{\sqrt{5}-1}{2})$$