

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(03/02/2010)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left(\left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| \right)$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1 - |1 - \arctang^2(x)|^{\frac{1}{4}}}{\log(1 + x^2)}$$

è integrabile negli intervalli $]0, 1]$, $[1, \infty[$.

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\arcsen(x)) - 1 + e^x - 1 - \sen(x)}{\arcsen(x) \arctang(x) + \log(x + 1)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(x) - \log(1 + x)}{x^{\frac{3}{2}} + \sen^{\frac{3}{4}}(x) + \sqrt{x}}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^2 = \operatorname{Im}(w) + i(\operatorname{Re}(w))^2 - |w|.$$

Svolgimento

1. ID: $\left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad \text{ID} = \mathbb{R}^*$

$f(x) \neq \pm f(x)$ f non è né pari né dispari

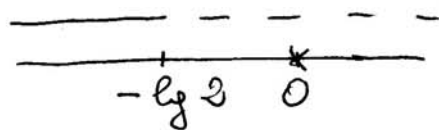
$f(x) > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} < -1 \vee \frac{e^x - 1}{e^x} > 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1 + e^x}{e^x} < 0 \vee$

$\frac{e^x - 1 - e^x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 2e^x < 1 \vee -1 > 0 \Leftrightarrow x < -\lg 2$
 $x < \lg \frac{1}{2}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\lg 2$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -\lg 2 < x < 0 \vee x > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \lg 2$



Asintoti

$\lim_{x \rightarrow 0} \lg \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \lg y = +\infty$

$\exists$ as. verticale su a dx de a
 $\exists \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg \left| 1 - \frac{1}{e^x} \right| = \lg 1 = 0 \quad y = 0 \text{ As. orizz. a } +\infty$

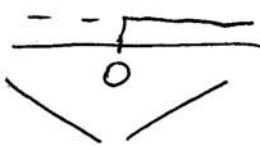
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lg \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \lg y = +\infty \quad \exists \text{ as. orizz. a } -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lg \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x \cdot e^x - e^x(e^x - 1)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{(e^x - 1)e^{2x}} = -1_{(u)}$

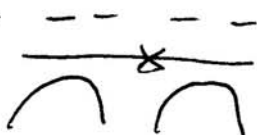
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lg \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg |e^x - 1| - \lg e^x + x = \lg 1 = 0 \quad (9)$

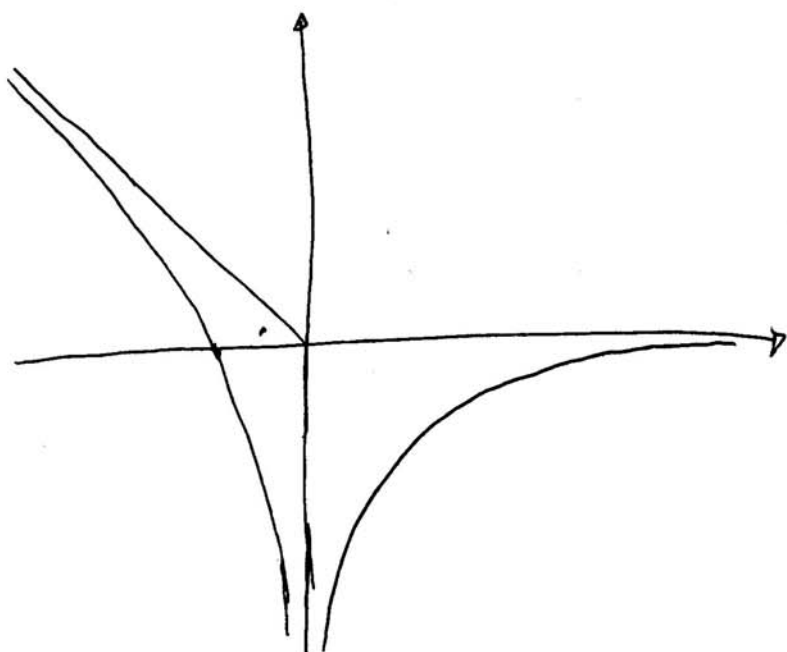
$y = -x$ as. obliqua a $-\infty$.

$y' = \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x \cdot e^x - e^x(e^x - 1)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x - 1} \quad \forall x \neq 0 \quad y' > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$
 $x > 0$



$y'' = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} \quad y'' > 0 \quad \emptyset$





2. f è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$, quindi in particolare lo è in $]0,1]$ e in $[1, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - |1 - \arctan^2 x|^{\frac{1}{4}}}{\lg(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \arctan^2 x)^{\frac{1}{4}} - 1}{\lg(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

poiché $1 - (1 - \arctan^2 x)^{\frac{1}{4}} \sim -\frac{1}{4}(-\arctan^2 x) \sim \frac{x^2}{4}$, $\lg(1+x^2) \sim x^2$ se $x \rightarrow 0$.

Perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$, f è integrabile in senso classico in $]0,1]$.

Invece

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - |1 - \arctan^2 x|^{\frac{1}{4}}}{\lg(1+x^2)} = \frac{1 - |1 - \frac{\pi^2}{16}|^{\frac{1}{4}}}{+\infty} = 0 \quad \text{con ordine molto lento}$$

e quindi < 1

$\Rightarrow f$ non è integrabile in $[1, +\infty)$.

3. Poiché $\cos(\arcsen x) - 1 \sim -\frac{1}{2}\arcsen^2 x \sim -\frac{x^2}{2}$

se $x \rightarrow 0$:

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\sen x \sim x$$

$$\arcsen x \sim x$$

$$\arctg x \sim x$$

$$\lg(1+x) \sim x$$

segue che il limite cercato diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + e^x - 1 - \sen x}{x^2 + x} = 0$$

perché $\text{ord}(e^x - 1 - \sen x) \geq 1$

e quindi prevale il denominatore.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}} + \sin^{\frac{3}{4}} x + \sqrt{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}}{\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\sin^{\frac{1}{4}} x \cdot \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

5. Posto $w = x + iy$ l'equazione diventa

$$(x + iy)^2 = y + ix^2 - \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = y + ix^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2xy = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 = y - |y| \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 - y^2 = y - \sqrt{5y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \\ -y^2 = y - y \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ -y^2 = y + y \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 = y - \sqrt{5}|y| \end{cases}$$

$$x = y = 0 \vee \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ y \geq 0 \\ 3y^2 + (\sqrt{5} - 1)y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ y < 0 \\ 3y^2 + (\sqrt{5} - 1)y = 0 \end{cases}$$

$$w = 0 \vee w = -2i \vee x = y = 0 \vee \begin{cases} x = 2y \\ y \geq 0 \\ y = \frac{1 - \sqrt{5}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2y \\ y < 0 \\ y = \frac{\sqrt{5} - 1}{3} \end{cases}$$

non acc. non acc.

Dunque l'eq. ha 2 soluzioni: $w = 0$ e $w = -2i$.