

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(10/12/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{|x|(x^2 - 1)}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{(1 - \cos(x))^\alpha}{1 - \sqrt{1 + x^\beta}}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(1+x)} + 2 \cos(\arctang(\sin(x))) - 3}{\log(x+1) \arctang(\cos^2(x) - 1) + \arctang(x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin(x)} + 2 \cos(\sin(x)) - 3}{\sin(x) \arctang(\arctang(x)(\cos(x) - 1)) + \arcsin(x)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^4 + 2w^2 + 4 + 2i = \frac{1+i}{1-i}.$$

Svolgimento

1. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ f è pari quindi si potrebbe studiarla solo per $x \geq 0$ eliminando il valore assoluto.

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow |x|(x^2 - 1) \geq 0 \quad \forall x \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$$

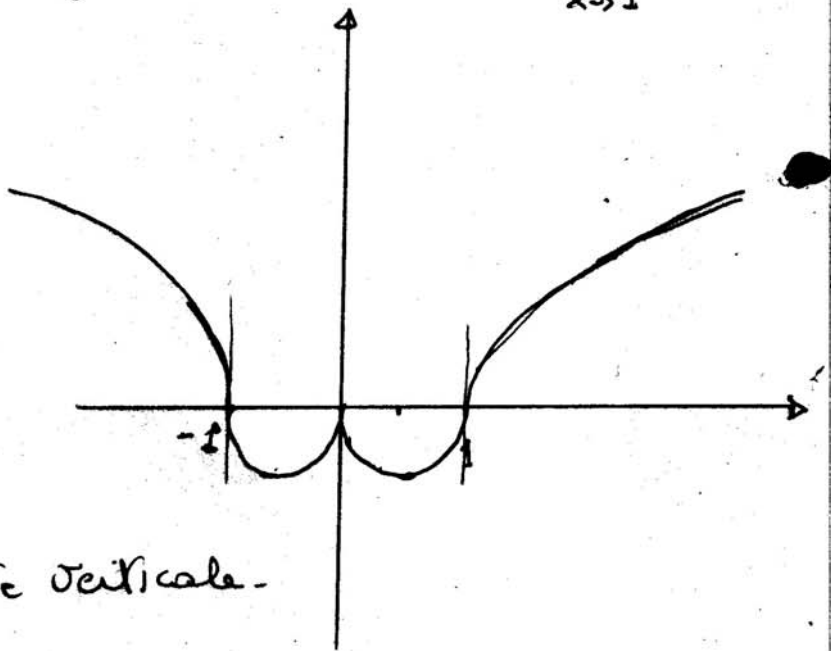
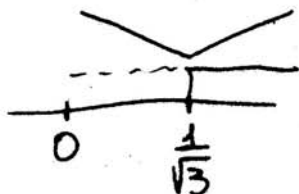
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[5]{|x|(x^2 - 1)} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{\sqrt[5]{x(x^2 - 1)}}{x}} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

Non ci sono altri tipi. Studia y' solo per $x \geq 0$

$$y' = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x(x^2 - 1)^4}} \cdot (3x^2 - 1) \quad \forall x > 0 \quad x \neq 1 \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$$

Poiché f è pari, segue da $f'_-(0) = -\infty$ $x = 0$ pt. cuspidale.
Invece $x = 1$ è un punto a tangente verticale essendo $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$

$$y' > 0 \quad 3x^2 - 1 > 0 \quad x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Poiché f parte da 0 decrescendo con tangente verticale, è inizialmente concava fino a $x = 1$ dove ha un flesso a tangente verticale.

2. Poiché $(1 - \cos x) \sim (\frac{1}{2} x^2)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha} x^{2\alpha}$ e

$$1 - \sqrt[2]{1+x^\beta} = - \left[(1+x^\beta)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \sim - \frac{1}{2} x^\beta \quad \text{per } x \rightarrow 0^+, \text{ segue da}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)^\alpha}{1 - \sqrt[2]{1+x^\beta}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2^\alpha} x^{2\alpha}}{\frac{1}{2} x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^{\alpha-\beta-1}} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \frac{\beta}{2} \\ -\frac{1}{2^{\alpha-\beta-1}} & \alpha = \frac{\beta}{2} \\ -\infty & \alpha < \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Dunque f è integrabile $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \frac{\beta}{2} - \alpha < 1$ (se $\alpha \geq \frac{\beta}{2}$ f è 1-reg. perché convergente, se $0 < \frac{\beta}{2} - \alpha < 1$ f è integrabile in senso improprio perché infinita di ordine $\frac{\beta}{2} - \alpha < 1$).

3. Si osserva che

$$e^{x \log(1+x)} - 1 \sim x \log(1+x) \sim x^2$$

$$2 \cos(\arctg(\sin x)) - 2 \sim 2 \left(-\frac{1}{2} \arctg^2(\sin x) \right) \sim -\sin^2 x \sim -x^2$$

quindi il numeratore ha ordine di infinitesimo > 2 mentre il denominatore ha ordine ≈ 1 essendo

$\log(x+1) \arctg(\cos^2 x - 1)$ trascurabile rispetto ad $\arctg x \sim x$ perché di ordine > 1 . Dunque il limite assegnato vale 0.

4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} + 2 \cos(\sin x) - 3}{\sin x \cdot \arctg(\arctg x (\cos x - 1)) + \arcsin x} &= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} (\sin x + x \cos x) - 2 \sin(\sin x) \cdot \cos x}{\cos x \cdot \arctg(\arctg x (\cos x - 1)) + \sin x \left[\frac{\cos x - 1}{1 + x^2} + \arctg x (-\sin x) \right] + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Posto $w^2 = z$ si ha $z^2 + 3z + 4 + 2i = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} \Leftrightarrow z^2 + 3z + 4 + 2i - i = 0$

$$z^2 + 3z + 4 + i = 0 \Leftrightarrow z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4-i}}{1} = -1 \pm \sqrt{-3-i}$$

Perché $-3-i = \sqrt{10}(\cos \bar{\theta} + i \sin \bar{\theta})$ dove $\cos \bar{\theta} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin \bar{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$
 le sol. dell'eq. sono (applicando le formule di Moivre)

$$\sqrt{-1 \pm [\sqrt{10}(\cos(\frac{\bar{\theta}}{2}) + i \sin(\frac{\bar{\theta}}{2}))]} = \sqrt{-1 \pm \sqrt{10} \left(-\frac{\sqrt{1-3\sqrt{10}}}{2} + i \frac{\sqrt{1+3\sqrt{10}}}{2} \right)}$$