

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

C.d.L. Chimica

(01/10/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{|x(x^2 - 1)|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + x^\alpha}}{(1 - \cos(x))^\beta}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin(x)} + 2 \cos(\sin(x)) - 3}{\sin(x) \arctan(\arctan(x)(\cos(x) - 1)) + \arcsin(x)}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\arctan(x)} - 2 \cos(\log(e^x - 1)) + \cos(x))}{\arctan(\log(\sin(x) + 1) + \sin(x))}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^6 + 2w^3 + 4 + 2i = \frac{1 + i}{1 - i}.$$

Svolgimento

1. $ID = \mathbb{R}$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ è pari

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 1$
 $(0,0) \quad (+1,0) \quad (-1,0)$ intersezioni con assi

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow |x(x^2-1)| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\nexists$ as. verticali
 perché f è cont. in $\mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$ $\nexists$ as. orizzontali

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[5]{|x(x^2-1)|}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|^{3/5}}{x} = 0$ $\nexists$ as. oblique

• La funzione non ha asintoti di alcun tipo

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{|x(x^2-1)|^4}} \cdot \frac{x(x^2-1)}{|x(x^2-1)|} \cdot (3x^2-1)$$

$x=0, x=\pm 1$ pti cuspidali.

$ID(f') = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$ In fatti:

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{5\sqrt[5]{|x(x^2-1)|^4}} \cdot \left(\frac{\pm x}{x}\right) \cdot \frac{x^2-1}{|x^2-1|} \cdot (3x^2-1) = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm 1^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 1^\pm} \frac{1}{5\sqrt[5]{|x(x^2-1)|^4}} \cdot \frac{x}{|x|} \cdot \frac{\pm(x^2-1)}{x^2-1} \cdot (3x^2-1) = \pm \infty$

Perché f è pari, anche -1 è pto cuspidale.

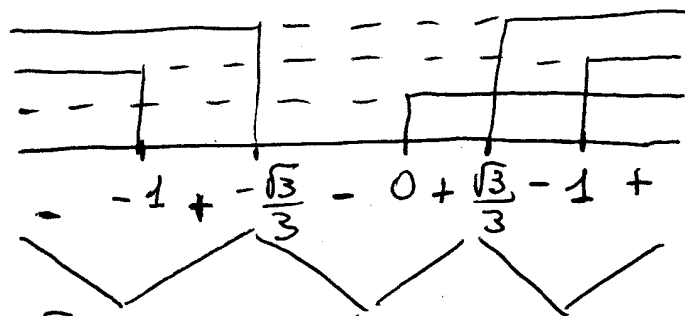
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)(3x^2-1) > 0$

$x > 0$

$x^2-1 > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$

$3x^2-1 > 0 \quad x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) > 0 \quad -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > 1$



(2)

$x = 0, x = \pm 1$ pts di minimo relativo e assoluto

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ pts di minimo relativo

Studio $f''(x)$ distinguendo sul segno di $x(x^2-1)$

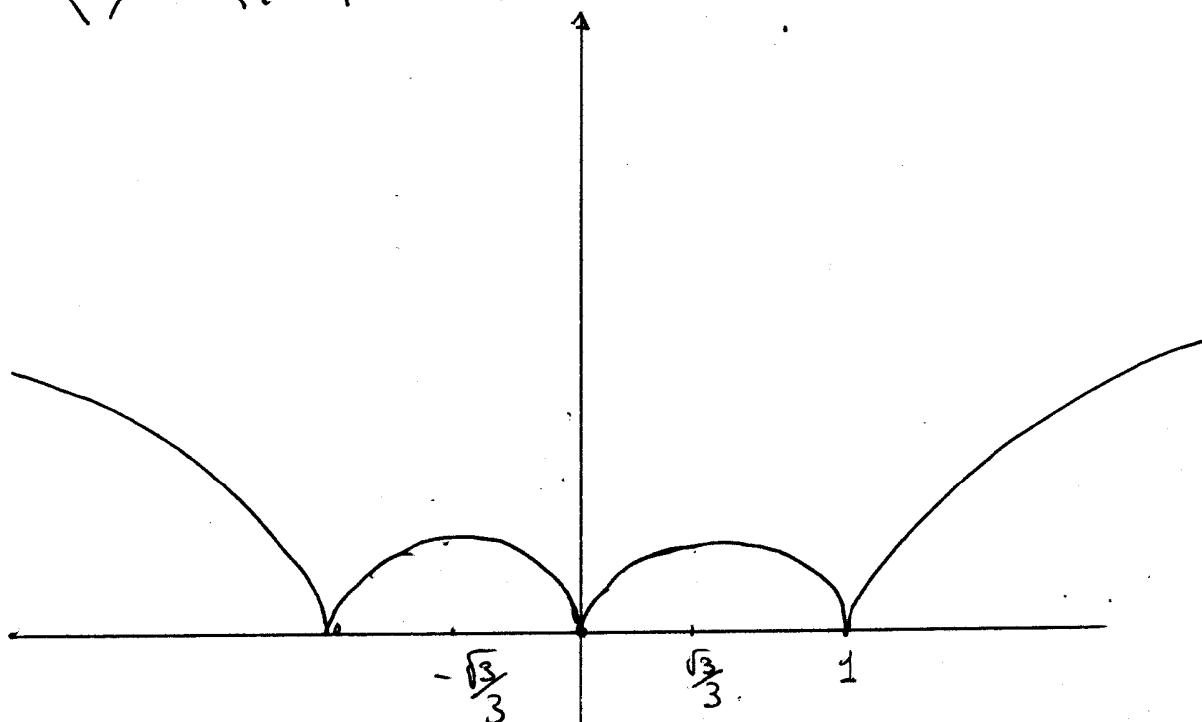
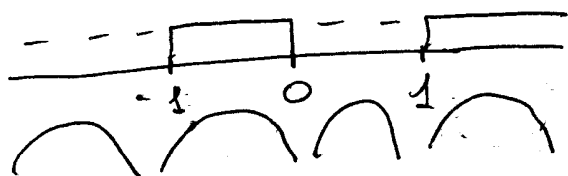
Se $x(x^2-1) > 0$

$$f''(x) = \frac{3x^2-1}{5\sqrt[5]{(x(x^2-1))^4}} = \frac{1}{5} \frac{6x\sqrt[5]{(x(x^2-1))^4} - (3x^2-1)\frac{4}{5}(x(x^2-1))^{\frac{4}{5}}(3x^2-1)}{(\sqrt[5]{x(x^2-1)})^2}$$
$$= \frac{1}{5} \frac{6x \cdot x(x^2-1) - \frac{4}{5}(3x^2-1)^2}{(\sqrt[5]{(x^2-1)x})^2 \sqrt[5]{x(x^2-1)}} = \frac{-6x^4 - 6x^2 - 4}{5(x(x^2-1))^{\frac{3}{5}}}$$

$$f'' > 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 3x^2 + 2 > 0 \quad \Delta < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dunque $f'' < 0 \quad \forall x$ s' $x(x^2-1) > 0$ cioè $-1 < x < 0$ o $x > 1$

Si vede subito che se $x(x^2-1) < 0$ allora $f'' < 0$ poiché f è pari.



3. Pochi f è continua in $]0,1]$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^\alpha}}{(1-\cos x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^\alpha}{(\frac{1}{2}x^2)^\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha > \beta \geq 0 \\ -2^{\beta-1} & \alpha = \beta \geq 0 \\ \pm \infty & 0 \leq \alpha < \beta \end{cases}$$

perciò $1 - \sqrt{1+x^\alpha} = \frac{1 + (1+x^\alpha)}{1 + \sqrt{1+x^\alpha}} \approx -\frac{1}{2}x^\alpha$ e $1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$

segue che f è integrabile in $]0,1]$ se $\alpha \geq \beta \geq 0$ perché
convergente a 0 ed è integrabile in $]0,1]$ se $\alpha < \beta < \alpha+1$
perciò infinita di ordine $\beta - \alpha < 1$. Dunque f è
integrabile in $]0,1]$ se $0 \leq \beta < \alpha + 1$.

3. Pochi

$$e^{x \operatorname{sen} x} + 2 \cos(\operatorname{sen} x) - 3 = e^{x \operatorname{sen} x} - 1 + 2(\cos(\operatorname{sen} x) - 1) \\ \approx x \operatorname{sen} x + 2\left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x\right)$$

il numeratore ha ordine > 2 .

Invece

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x (\cos x - 1)) + \operatorname{arcsen} x \approx$$

$$x \cdot (\operatorname{arctg} x \cdot (\cos x - 1)) + x \approx x \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + x \approx x$$

quindi il denominatore ha ordine 1. Segue che il
limite proposto vale 0.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(e^{\operatorname{arctg} x} - 2 \cos(e^x - 1)) + \cos x}{\operatorname{arctg}(\lg(\operatorname{sen} x + 1) + \operatorname{sen} x)} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^{\arctg x} - 2 \cos(\lg(e^x - 1)) + \cos x) \cdot \left(\frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} + 2 \frac{\sin(e^x - 1)}{e^x - 1} - e^x - \sin x \right)}{\frac{1}{1 + (\lg^2(\sin x + 1) + \sin x)^2} \cdot \frac{1}{\sin x + 1} \cdot \cos x + \cos x}$$

$$= \frac{\cos 0 \cdot (1 + 0 - 0)}{1 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

5. Potrebbe $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i$

• basta studiare l'eq. $\omega^6 + 2\omega^3 + 4 + i = 0$

Ponendo $\omega^3 = z$ si ha $z^2 + 2z + 4 + i = 0$

$$z_{1/2} = -1 + \sqrt{1-4-i} = -1 + \sqrt{-3-i} = -1 \pm \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

perché

$$\sqrt{-3-i} = \left\{ \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{\theta+2k\pi}{2} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{2} \right) \mid k=0,1 \right\}$$

$$= \pm \sqrt[4]{10} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{dove } \theta \text{ è } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Le 6 soluzioni dell'equazione si ottengono calcolando

$$\sqrt[3]{z_1} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{z_2}$$