

COMPITO DI ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I
C.d.L. Chimica
(18/09/2009)

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|}}{x}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

Esercizio 2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \geq 0$ la seguente funzione è integrabile nell'intervallo $]0, 1]$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + x^\alpha}}{\sin^\beta(x)}.$$

Esercizio 3. Senza utilizzare il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)} + 1 - \sqrt{e^{x^2}}}{\sqrt{|\sin(x)|} (e^{1 - \sqrt{x+1}} - 1) + 1 - \sqrt{x+1}}.$$

Esercizio 4. Utilizzando il Teorema di de l'Hopital calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctang(\cos(x) - e^x) + \cos(e^{\sin(x)} - 1) - 1}{(e^x - 1) \arctang(\arcsen(x)(\cos(\sin(x)) - 1)) + \arctang(x)}.$$

Esercizio 5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$w^8 + 4w^4 + 16 - 2i = \frac{1+i}{i-1}.$$

Svolgimento

1. ID: $\mathbb{R} - \{0\}$ $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|}}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^4 - 5x^2 + 6| = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 & x = \pm \sqrt{3} \\ 2 & x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$

$(\pm \sqrt{3}, 0)$ $(\pm \sqrt{2}, 0)$ intersezioni con asse x; f è dispari

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm \infty$ $x = 0$ As. Verticale

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \sqrt{1 - 5/x^2 + 6/x^4}}{x} = \pm \infty$ As. Obliqua

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \sqrt{1 - 5/x^2 + 6/x^4}}{x^2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|}}{x} - x$ razionalizzo
(altrimenti non si può fare)
e si trova 1
perché $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$

$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 6 - x^4}{x(\sqrt{x^4 - 5x^2 + 6} + x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-5x^2}{2x^3} = 0$ per $|x|$ grande

$y = x$ as. obliquo a $\pm \infty$.

$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|}} \cdot (2x^3 - 10x) - \sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|}}{x^2}$

$= \frac{(x^4 - 5x^2 + 6) \cdot (2x^3 - 5x) - 2(x^4 - 5x^2 + 6)^2}{2\sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|} |x^4 - 5x^2 + 6| x^2}$

$\gamma = \frac{x^4 - 5x^2 + 6}{|x^4 - 5x^2 + 6|} \cdot \frac{x^4 - 6}{x^2 \sqrt{|x^4 - 5x^2 + 6|}}$

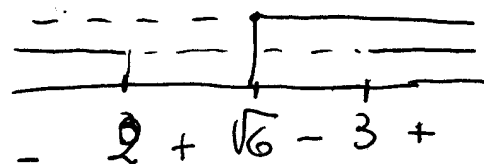
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - 5x^2 + 6)(x^2 - 6) \geq 0$$

(2)

$$x^4 - 5x^2 + 6 \geq 0 \quad x^2 \leq 2 \vee x^2 \geq 3$$

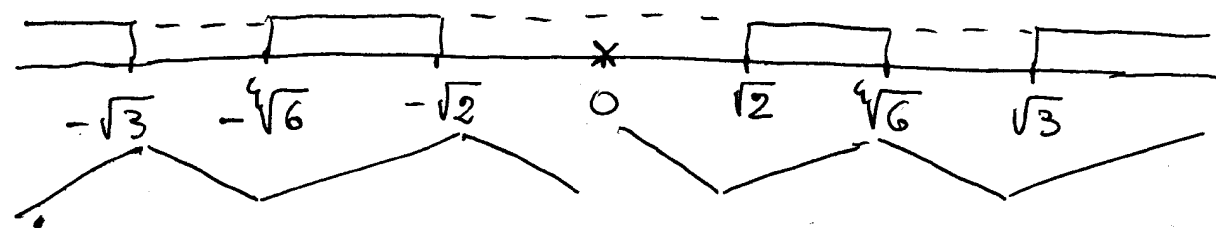
$$x^4 - 6 \geq 0$$

$$x^2 \geq \sqrt{6}$$



$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x^2 \leq \sqrt{6} \vee x^2 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt[4]{6} \vee x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3} \vee -\sqrt[4]{6} \leq x \leq -\sqrt{2}$$



$$x = -\sqrt{3} \quad x = -\sqrt{2} \quad x = \sqrt[4]{6} \quad \text{punti di massimo}$$

$$x = -\sqrt[4]{6} \quad x = \sqrt{2} \quad x = \sqrt{3} \quad \text{pti di minimo}$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

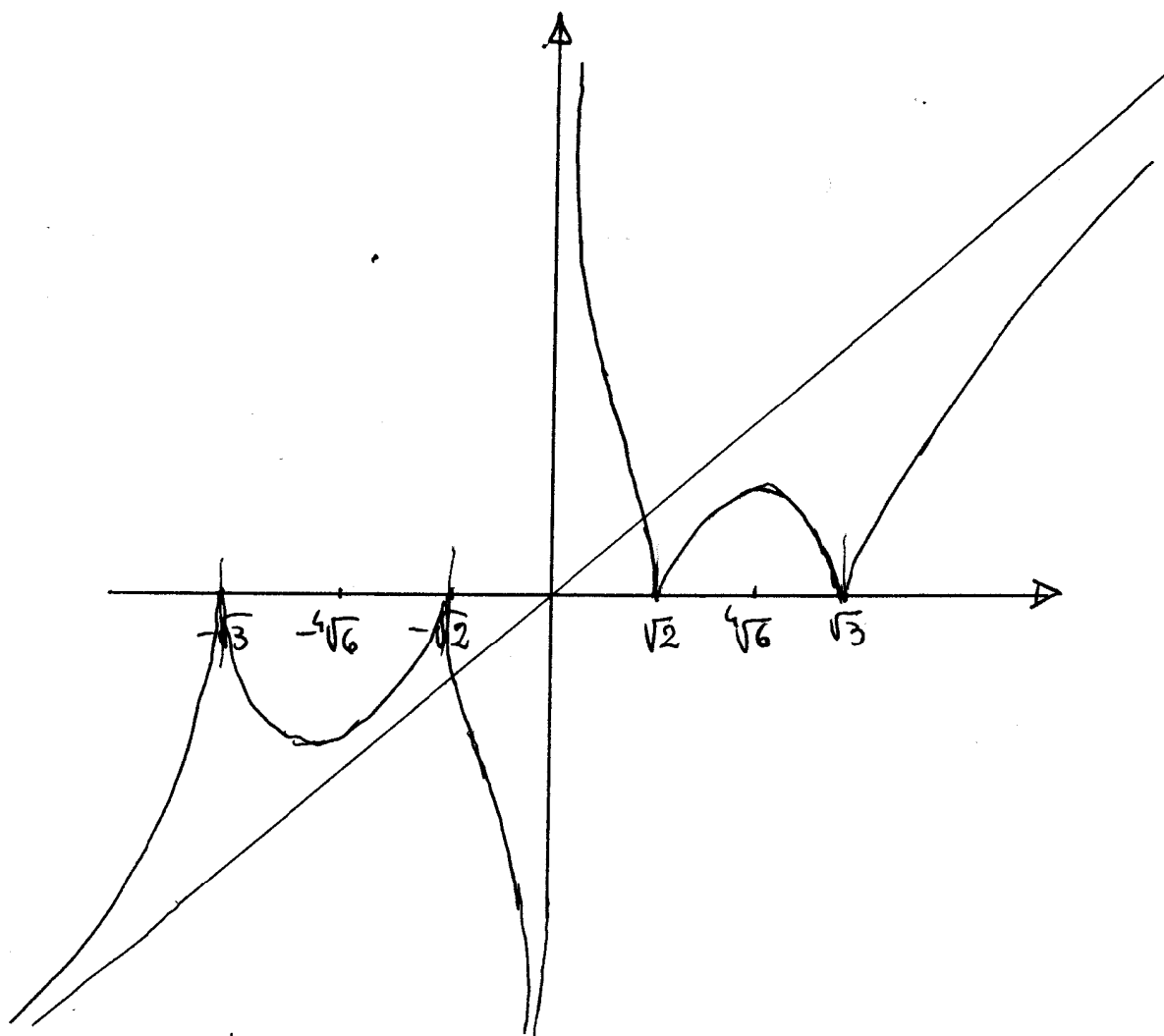
$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt[4]{6} \\ y = \pm \frac{\sqrt{142 - 5\sqrt{6}}}{\sqrt[4]{6}} = \pm \sqrt[4]{2\sqrt{6} - 30} \end{cases}$$

Non studio il segno delle derivate seconde, perché troppo lungo. Del resto la concavità della funzione si può dedurre dagli altri elementi, in particolare dal fatto che $x = \pm \sqrt{2}$ e $x = \pm \sqrt{3}$ sono pt. angolari.

$$\text{Infatti } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \pm \frac{x^4 - 6}{x^2 \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}} = \pm \frac{-2}{0^+} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \mp \frac{x^4 - 6}{x^2 \sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}} = \mp \frac{-2}{0^+} = \pm \infty$$



$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1+x^\alpha}}{\sin^\beta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2} x^\alpha}{x^\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha > \beta \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \alpha = \beta \geq 0 \\ -\infty & \alpha < \beta \end{cases}$$

$$1 - \sqrt{1+x^\alpha} \approx -\frac{1}{2} x^\alpha \quad \text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^\alpha} - 1}{x^\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^\beta x \approx x^\beta$$

$$\text{perché} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dunque f è integrabile in $]0,1]$ se $0 \leq \beta \leq \alpha$ perché
 convergente per $x \rightarrow 0^+$ ed è integrabile anche se
 $\beta < \alpha + 1$ perché infinita di ordine $\beta - \alpha < 1$.

Dunque f è integrabile in $]0,1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \exists \beta$

$$0 \leq \beta < \alpha + 1.$$

3. Poidi

$$1 - \sqrt{\cos x} = \frac{(1 - \cos x)}{1 + \sqrt{\cos x}} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \quad \text{perdi} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sqrt{e^{x^2}} = \frac{1 - e^{x^2}}{1 + \sqrt{e^{x^2}}} \approx -\frac{1}{2} x^2 \quad \text{perdi} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{1 + \sqrt{e^{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{|\sin x|} \approx \sqrt{|x|}$$

$$1 - \sqrt{x+1} = -\frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} \approx -\frac{1}{2} x \quad \text{perdi} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$e^{1 - \sqrt{x+1}} - 1 \approx 1 - \sqrt{x+1} \approx -\frac{1}{2} x$$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x^2}{\sqrt{|x|} \left(-\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4} x^2}{-x \sqrt{|x|}} = 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(\cos x - e^x) + \cos(e^{\sin x} - 1) - 1}{(e^x - 1) \arctg((\arcsin x)(\cos(\sin x) - 1)) + \arctg x} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x - e^x}{1 + (\cos x - e^x)^2} - \sin(e^{\sin x} - 1) \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x}{e^x \cdot \arctg((\arcsin x)(\cos(\sin x) - 1)) + (e^x - 1) \frac{\cos(\sin x) - 1}{1 - x^2} + \arcsin x (-\sin(\sin x) \cdot \cos x)} + \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\bar{1} \quad \frac{0}{1} = 0$$

$$5. \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i$$

$$\omega^8 + 4\omega^4 + 16 - 2i = i$$

$$\omega^8 + 4\omega^4 + 16 - 3i = 0 \quad \text{Ponendo } \omega^4 = z \text{ si ha}$$

$$z^2 + 4z + 16 - 3i = 0$$

$$z_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 16 + 3i} = -2 \pm \sqrt{-12 + 3i} =$$

$$= -2 \pm \sqrt[4]{153} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

In fatt

$$\sqrt{-12 + 3i} = \left\{ \sqrt[4]{153} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{2} \right), k=0,1 \right\}$$

$$= \pm \sqrt[4]{153} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\text{dove } \theta \text{ è: } \cos \theta = \frac{a}{p} = \frac{-12}{\sqrt{153}} = \frac{-4}{\sqrt{37}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{p} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Per trovare le 8 radici complesse bisogna trovare le radici
quarte di z_1 e z_2 , cioè risolvere

$$\omega = \sqrt[4]{z_1} \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt[4]{z_2}$$